一、 多重選擇題：每題20分，共20分

1.(　　)多項式 $f(x)$ 除以 $x-\dfrac{b}{a}$ 得商式為 $Q(x)$，餘式為 r，則下列何者正確？

(A) $f(x)$ 除以 $ax-b$，餘式為 r

(B) $f(x)$ 除以 $ax-b$，得商式為 $aQ(x)$

(C) $f\left(\dfrac{x}{a}\right)$ 除以 $x-b$，餘式為 r

(D) $af(x)$ 除以 $ax-b$，餘式為 ar

(E) $xf(x)$ 除以 $ax-b$，餘式為 r

二、 填充題：每題20分，共80分

1. 若自然數 n 滿足 $\log_5(\log_3 n)=2$，則 n 是【　　　　】位數

2. 已知 $(x+1)f(x)+2$ 為 x^2+2x+3 的倍式，求多項式 $f(x)$ 被 x^2+2x+3 除的餘式為【　　　　】

3. 設 $f(x)=x^3+2x^2-x+3$，$g(x-1)=f(x)$，$h(x+1)=g(x+3)$，則以 $x+1$ 除 $f(x)+xh(x)$ 之餘式為【　　　　】

4. $f(x)=2x^4+x^3-x^2-7x-6$，求 $f\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)=$【　　　　】

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 20 分

1.(A)(C)(D)

二、 填充題：每題 20 分，共 80 分

1.12

2.$x+1$

3.-12

4.$\sqrt{17}$

\- << 解 析 >> -

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 20 分

1.解析：$f(x)=\left(x-\dfrac{b}{a}\right)Q(x)+r$

(A)(B)$f(x)=(ax-b)\left(\dfrac{1}{a}\cdot Q(x)\right)+r$

故 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 得商式為 $\dfrac{1}{a}Q(x)$，餘式為 r

(C)$f\left(\dfrac{x}{a}\right)=\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{b}{a}\right)\cdot Q\left(\dfrac{x}{a}\right)+r=(x-b)\left(\dfrac{1}{a}Q\left(\dfrac{x}{a}\right)\right)+r$

故 $f\left(\dfrac{x}{a}\right)$ 除以 $x-b$，餘式為 r

(D)$af(x)=a\left(x-\dfrac{b}{a}\right)Q(x)+ar=(ax-b)Q(x)+ar$

故 $af(x)$ 除以 $ax-b$，餘式為 ar

(E)$xf(x)=x\cdot\left(x-\dfrac{b}{a}\right)\cdot Q(x)+r\cdot x$

$=\left(x-\dfrac{b}{a}\right)\cdot(x\cdot Q(x))+r\left(x-\dfrac{b}{a}\right)+\dfrac{br}{a}$

$=\left(x-\dfrac{b}{a}\right)(xQ(x)+r)+\dfrac{br}{a}$

$=(ax-b)\cdot\left(\dfrac{1}{a}xQ(x)+\dfrac{r}{a}\right)+\dfrac{br}{a}$

故 $x(fx)$ 除以 $ax-b$，餘式為 $\dfrac{br}{a}$

故選(A)(C)(D)

二、 填充題：每題 20 分，共 80 分

1.解析：$\log_5(\log_3 n)=2\Rightarrow\log_3 n=5^2=25\Rightarrow n=3^{25}$

$\therefore\log n=\log 3^{25}\approx 25\times 0.4771=11.9275$

首數 11，因此 n 為 12 位數

2.解析：$(x+1)f(x)+2$ 為 x^2+2x+3 的倍式

$\Rightarrow (x+1)f(x)+2=(x^2+2x+3)Q(x)$

$\Rightarrow (x+1)f(x)=(x^2+2x+3)Q(x)-2$

設 $f(x)=(x^2+2x+3)q(x)\underbrace{+ax+b}_{\text{餘式}}$

則 $(x+1)f(x)$

$=(x+1)[(x^2+2x+3)q(x)+ax+b]$

$=(x^2+2x+3)(x+1)q(x)+(x+1)(ax+b)$

$=(x^2+2x+3)(x+1)q(x)+ax^2+(a+b)x+b$

$=(x^2+2x+3)(x+1)q(x)+a(x^2+2x+3)-2ax-3a+(a+b)x+b$

$=(x^2+2x+3)[(x+1)q(x)+a]+(b-a)x+(b-3a)$

$\therefore \begin{cases} b-a=0 \\ b-3a=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

故 $f(x)$ 被 x^2+2x+3 除的餘式為 $x+1$

3.解析：由餘式定理知所求餘式為 $f(-1)+(-1)h(-1)$。

直接將 $x=-1$ 代入即得 $f(-1)=5$；

且 $h(-1)=h(-2+1)=g(-2+3)=g(1)=g(2-1)=f(2)=17$

故所求餘式為 $f(-1)+(-1)h(-1)=5-17=-12$

4.解析：$f(x)=2x^4+x^3-x^2-7x-6$，求 $f\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$ 的值，

令 $x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$，則 $4x=3+\sqrt{17}\Rightarrow 4x-3=\sqrt{17}\Rightarrow (4x-3)^2=(\sqrt{17})^2$

$\Rightarrow 16x^2-24x+9-17=0\Rightarrow 16x^2-24x-8=0\Rightarrow 2x^2-3x-1=0$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+2+3 \\
\hline
2-3-1 & 2+1-1-7-6 \\
 & 2-3-1 \\
\hline
 & \quad 4+0-7 \\
 & \quad 4-6-2 \\
\hline
 & \qquad 6-5-6 \\
 & \qquad 6-9-3 \\
\hline
 & \qquad\quad 4-3
\end{array}
$$

$\therefore f(x)=(2x^2-3x-1)(x^2+2x+3)+4x-3$

故 $f\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)=0+4\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)-3=3+\sqrt{17}-3=\sqrt{17}$