一、 填充題：每題 20 分，共 100 分

1. 設 $x>0$，$y>0$，且 $xy=10$，則 $5x+2y$ 的最小值為【　　】，此時數對 $(x，y)=$【　　】

2. $x>-4$，則 $x+3+\dfrac{9}{x+4}$ 的最小值為【　　】

3. 兩正實數 a，b 滿足 $a^2+9b^2=9$，試求 $(a+3b)^2$ 的最大值為【　　】

4. x，y 皆正數且 $xy=12$，若 $x=a$，$y=b$ 時，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}$ 有最小值 m，則 $a+b+m=$【　　】

5. 旺伯想利用 21 公尺長的鐵絲網在屋後的空地上圍出一塊矩形的菜圃，將菜圃靠在屋後，則只須圍三邊，且為方便進出三邊都留下 1 公尺的出入口，若旺伯想圍成面積最大的菜圃，則最大面積為 M 平方公尺，長邊為 k 公尺，求數對 $(M，k)=$【　　】

6. 若 $a+b+c=4$，$a^2+b^2+c^2=14$，$a^3+b^3+c^3=34$，則 $abc=$【　　】【加分題】

一、 填充題：每題 20 分，共 120 分

1.20；（2，5）

2.5

3.18

4.9

5.（72，12）

6.－6

\- << 解 析 >> -

1.解析：$\dfrac{5x+2y}{2}\geqq\sqrt{5x\cdot 2y}\Rightarrow 5x+2y\geqq 2\sqrt{10xy}=20$

等號成立時，$5x=2y\Rightarrow x=\dfrac{2}{5}y$，又 $5x+2y=20\Rightarrow 2y+2y=20\Rightarrow y=5\Rightarrow x=\dfrac{2}{5}y=2$

故 $5x+2y$ 的最小值為 20，此時數對（x，y）＝（2，5）

2.解析：$x>-4$，求 $x+3+\dfrac{9}{x+4}=(x+4)-1+\dfrac{9}{x+4}=(x+4)+\dfrac{9}{(x+4)}-1$ 的最小值

$x+4>0$，則由算幾不等式可知 $\dfrac{(x+4)+\dfrac{9}{x+4}}{2}\geqq\sqrt{(x+4)\cdot\dfrac{9}{(x+4)}}=\sqrt{9}=3$

$\therefore x+4+\left(\dfrac{9}{x+4}\right)\geqq 2\times 3=6$ 有最小值 6

故原式化為 $(x+4)+\dfrac{9}{(x+4)}-1$，有最小值為 $6-1=5$

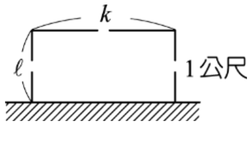
3.解析：$\because\dfrac{a^2+9b^2}{2}\geqq\sqrt{a^2\cdot 9b^2}$ $\therefore\dfrac{9}{2}\geqq 3ab$

$\Rightarrow(a+3b)^2=a^2+6ab+9b^2=(a^2+9b^2)+2\cdot(3ab)\leqq 9+2\cdot\dfrac{9}{2}=18$

4.解析：由算幾不等式知 $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}}{2}\geqq\sqrt{\dfrac{3}{xy}}=\sqrt{\dfrac{3}{12}}=\dfrac{1}{2}$，因此 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}\geqq 1$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}$ 最小值 $m=1$，此時 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{y}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=2$，$y=6$ 故 $a+b+m=2+6+1=9$

5.解析：如圖，則 $k+2\ell=21+3=24$



由算幾不等式知 $\dfrac{k+2\ell}{2}\geqq\sqrt{2k\ell}\Rightarrow 12\geqq\sqrt{2k\ell}\Rightarrow k\ell\leqq\dfrac{144}{2}=72$

當 $k=2\ell=12$ 時，面積 $k\ell$ 有最大值 72

故數對（M，k）＝（72，12）

6.解析：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=16$ 且 $a^2+b^2+c^2=14$

$\therefore 2(ab+bc+ac)=2\Rightarrow ab+bc+ac=1$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

$\Rightarrow 34-3abc=4\times(14-1)=52$

$\Rightarrow -3abc=18\Rightarrow abc=-6$