

一、填充題：每題 20 分，共 100 分

1. 設 $f(x)$ 為一多項式。若 $(x-1) \cdot f(x)$ 除以 x^2+1 的餘式為 $-x-3$ ，則 $f(x)$ 除以 x^2+1 的餘式為【 】
2. 已知 $f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式為 $3x-2$ ， $g(x)$ 除以 x^2+2x-3 之餘式為 $5x+2$ ，則 $(x+3)f(x) + (x+1)g(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為【 】
3. 設 $\deg f(x) \geq 3$ ，若多項式 $f(x)$ 除以 x^2-x-2 的餘式為 $5x-7$ ，除以 x^2-x-6 餘式為 $-x+8$ ，試求 $f(x)$ 除以 x^2-5x+6 的餘式為【 】
4. $\deg f(x) \geq 4$ ，若 $f(x)$ 除以 x^2+3x+4 、 $x-1$ 的餘式分別為 $x+2$ 、 11 ，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+3x+4)$ 的餘式為【 】
5. 多項式 $f(x)$ 以 $(x-1)^2$ 除之餘式為 $8x+7$ ，以 $(2x+1)^2$ 除之餘式為 $-4x+1$ ，試求 $f(x)$ 以 $(x-1)(2x+1)^2$ 除之餘式為【 】



一、填充題：每題 20 分，共 100 分

1. $2x+1$

2. 18

3. $2x-1$

4. x^2+4x+6

5. $8x^2+4x+3$

----- << 解析 >> -----

1. **解析**：令 $f(x) = (x^2+1)Q(x) + ax+b$

則 $(x-1)f(x)$

$= (x-1)(x^2+1)Q(x) + (x-1)(ax+b)$

$= (x-1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + (b-a)x - b$

$= (x^2+1)[(x-1)Q(x) + a] + (b-a)x - (b+a)$

餘式 $(b-a)x - (b+a)$ 即 $-x-3$

$\Rightarrow \begin{cases} b-a = -1 \\ b+a = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

故 $f(x)$ 除以 x^2+1 之餘式為 $2x+1$

2. **解析**：由題意知 $f(x) = (x^2-1)q_1(x) + (3x-2)$ ， $g(x) = (x-1)(x+3)q_2(x) + (5x+2)$

所以 $f(1) = 1$ ， $g(1) = 7$ ，故由餘式定理，所求餘式為 $4f(1) + 2g(1) = 18$

3. **解析**： $f(x) = (x^2-x-2)Q_1(x) + 5x-7$

$= (x^2-x-6)Q_2(x) - x+8$

$\Rightarrow f(x) = (x-2)(x+1)Q_1(x) + 5x-7$

$= (x-3)(x+2)Q_2(x) - x+8$

設 $f(x) = (x^2-5x+6)Q(x) + \underbrace{ax+b}_{\text{餘式}}$

$\Rightarrow f(x) = (x-3)(x-2)Q(x) + ax+b$

$\therefore \begin{cases} f(3) = 3a+b = -3+8=5 \\ f(2) = 2a+b = 10-7=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

故 $f(x)$ 除以 x^2-5x+6 的餘式為 $2x-1$

4. **解析**：令 $f(x) = (x-1)(x^2+3x+4)q(x) + a(x^2+3x+4) + x+2$

由 $f(1) = 8a+3=11$ 得 $a=1$

餘式 $(x^2+3x+4) + x+2 = x^2+4x+6$

5. **解析**： $f(x)$ 以 $(x-1)^2$ 除之餘式為 $8x+7 \Rightarrow f(x)$ 以 $x-1$ 除之餘式為 $f(1) = 15$

設 $f(x) = (x-1)(2x+1)^2q(x) + a(2x+1)^2 + (-4x+1)$

由 $f(1) = 15 \Rightarrow 9a-3=15 \Rightarrow a=2$

故所求餘式為 $2(2x+1)^2 + (-4x+1) = 8x^2+4x+3$