

一、填充題：每題 20 分，共 100 分

1. 試求 $13^5 - 7 \times 13^4 - 72 \times 13^3 - 76 \times 13^2 - 17 \times 13 + 9 =$ 【 】

2. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1 =$ 【 】

3. 設 $f(x) = 3x^3 + 12x^2 + 8x - 5 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$,

其中 a, b, c, d 為實數，則：

(1) 序組 $(a, b, c, d) =$ 【 】

(2) 求 $f(-0.999)$ 的近似值為 【 】 (四捨五入取小數點後三位數字)

4. 以 $x^2 - x + 1$ 除 x^{16} 之餘式為 【 】。

5. 設 k 為整數，若 $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 15x^2 + 5kx - 3$ 有整係數一次因式，則 $k =$ 【 】

一、填充題：每題 20 分，共 100 分

1.126

2. $8 + 2\sqrt{5}$

3. (1) $(3, 3, -7, -4)$; (2) -4.007

4. (1) $-x-1$; (2) $-x$; (3) $x-1$

5.2

----- << 解析 >> -----

1. **解析**：

$$\begin{array}{r} 1 - 7 - 72 - 76 - 17 + 9 \quad | \quad 13 \\ + 13 + 78 + 78 + 26 + 117 \\ \hline 1 + 6 + 6 + 2 + 9 + 126 \end{array}$$

所以原式為 126

2. **解析**： $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (2x-1)^2 = 5 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x + 1 = (x^2 - x - 1)(x^2 + 4x + 5) + 4x + 6$$

$$\text{所求 } f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 6 = 8 + 2\sqrt{5}$$

3. **解析**： $f(x) = 3x^3 + 12x^2 + 8x - 5$ ，由連續綜合除法可得

$$(1) f(x) = 3x^3 + 12x^2 + 8x - 5 = 3(x+1)^3 + 3(x+1)^2 - 7(x+1) - 4$$

$$\therefore \text{序組 } (a, b, c, d) = (3, 3, -7, -4)$$

$$(2) f(-0.999) = 3(0.001)^3 + 3(0.001)^2 - 7(0.001) - 4$$

太小忽略不計

$$\approx -0.007 - 4 = -4.007$$

4. **解析**：因為 $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ ，所以先求 $x^3 + 1$ 除 x^{16} 之餘式：

$$x^{16} \mid_{x^3=-1} = (x^3)^5 x = (-1)^5 \cdot x = -x$$

此次數小於 2，亦可作為以 $x^2 - x + 1$ 除 x^{16} 之餘式

5. **解析**：令 $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 15x^2 + 5kx - 3$ ，由牛頓定理知一次因式在 $x \pm 1, x \pm 3$ 中

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 - 3 + 4 - 15 + 5k - 3 = 0 \Rightarrow 5k = 16 \Rightarrow k \notin \mathbb{Z} \text{ (不合)}$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 - 3 - 4 - 15 - 5k - 3 = 0 \Rightarrow 5k = -26 \Rightarrow k \notin \mathbb{Z} \text{ (不合)}$$

$$f(3) = 0 \Rightarrow 243 - 243 + 108 - 135 + 15k - 3 = 0 \Rightarrow 15k = 30 \Rightarrow k = 2 \in \mathbb{Z}$$

$$f(-3) = 0 \Rightarrow -243 - 243 - 108 - 135 - 15k - 3 = 0 \Rightarrow k \notin \mathbb{Z} \text{ (不合)}$$

故 $k=2$

$$\begin{array}{r} 3 + 12 + 8 - 5 \quad | \quad -1 \\ - 3 - 9 + 1 \\ \hline 3 + 9 - 1 \quad | \quad (-4) \rightarrow d \\ - 3 - 6 \\ \hline 3 + 6 \quad | \quad (-7) \rightarrow c \\ - 3 \\ \hline a \leftarrow (3) + (3) \rightarrow b \end{array}$$