多重選擇題：每題 8 分，共 32 分

1. (　　)若 $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，則下列選項中可能正確的有哪些？
(A) $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$　(B) $\sin2\theta=-\dfrac{24}{25}$　(C) $\cos\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1}{5}}$
(D) $\cos3\theta=-\dfrac{117}{125}$　(E) $\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm2$

2. (　　)若 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，試問以下哪些選項恆成立？
(A) $\sin\theta<\cos\theta$　(B) $\tan\theta<\sin\theta$　(C) $\cos\theta<\tan\theta$
(D) $\sin2\theta<\cos2\theta$　(E) $\tan\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{1}{2}\tan\theta$

3. (　　)於$\triangle ABC$ 中，下列各敘述何者為真？
(A) $\sin A+\sin B>\sin C$
(B)若 $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，則$\angle C=80^\circ$
(C)若 $\sin A\cdot\sin B<\cos A\cdot\cos B$，則$\triangle ABC$ 為銳角三角形
(D)若 $\sin^2A+\sin^2B<\sin^2C$，則$\triangle ABC$ 為鈍角三角形
(E)若 $\overline{AB}=\sqrt{2}$，$\overline{AC}=1$，$\angle B=30^\circ$，則$\angle C=45^\circ$

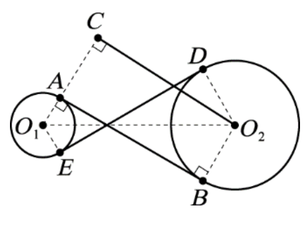
4. (　　)$\triangle ABC$ 中，若 $\tan B=1$，$\tan C=2$，$b=\overline{AC}=100$，則
(A) $\sin A=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　(B) $\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$　(C) $a=60\sqrt{5}$
(D) $a=50\sqrt{3}$　(E) $a=30\sqrt{6}$

填充題：每格 5 分，共 80 分

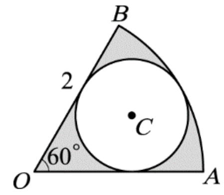
1. 鐘面上 4 點 48 分時，時針與分針所夾的銳角弧度為【　　　　】

2. 試求 $\cos44^\circ\sin164^\circ-\sin224^\circ\cos344^\circ=$【　　　　】

3. 設兩輪半徑分別為 2 公尺及 4 公尺，兩輪中心相距 12 公尺，今將一皮帶交叉繞此兩輪，使轉動時兩輪之轉向相反，則皮帶長為【　　　　】公尺

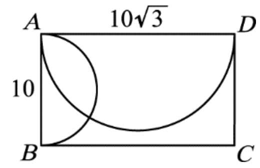


4. 如圖，扇形 OAB 的半徑為 2，圓心角為 60°，C 為內切圓圓心，則：
(1)內切圓的半徑為【　　　　】
(2)陰影部分的面積為【　　　　】

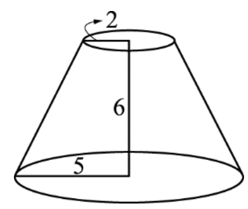


5. 設一直圓錐之頂點為 A，$\overline{BC}$ 為底圓之直徑，$\overline{AC}=12$，$\overline{BC}=6$，又 D 為母線 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{AD}=4$，今有一動點 P，自 D 點沿側表面繞圈至 C 點（不可沿母線），則最短距離為【　　　　】

6. 如圖，長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AD}=10\sqrt{3}$，今以 $\overline{AB}$，$\overline{AD}$ 為直徑作半圓於長方形內部，則：
(1)兩半圓交集部分的面積為【　　　　】
(2)兩半圓交集部分的周長為【　　　　】



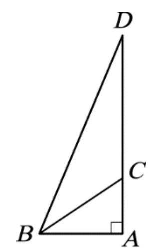
7. 如圖，一直圓錐臺上下底半徑各為 2，5，高為 6，求此錐臺之側表面積為【　　　　】



8. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\overline{AC}=1$，$\overline{BC}=3$，D、E 將 $\overline{BC}$ 三等分，$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}$，則 $\tan\angle DAE=$【　　　　】

9. 設 $180^\circ<\alpha<270^\circ$，$0^\circ<\beta<90^\circ$，若 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，試求 $\alpha+\beta$ 之值=【　　　　】

10. 如圖，直角三角形 ABD 中，$\angle A$ 為直角，C 為 $\overline{AD}$ 邊上的點。已知 $\overline{BC}=6$，$\overline{AB}=5$，$\angle ABD=2\angle ABC$，則 $\overline{BD}=$【　　　　】



11. 已知 $\cos4\theta=\dfrac{1}{2}$，則 $\sin^6\theta+\cos^6\theta=$【　　　　】

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=5$，$\angle ACB=2\theta$，$\angle ABC=\theta$，求 $\overline{BC}=$【　　　　】

13. 設 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 為 $5x^2-x+k=0$ 之兩根，其中 $0^\circ<\theta<180^\circ$，則：
(1) $k=$【　　　　】
(2) $\tan2\theta=$【　　　　】。

14. 已知 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\dfrac{13}{7}$，求 $\cos(\alpha-\beta)=$【　　　　】【加分題】

一、 多重選擇題：每題 8 分，共 32 分

1.(A)(B)(C)(E)　2.(A)(E)　3.(A)(D)　4.(A)(C)

二、 填充題：每格 5 分，共 80 分

1.$\frac{4\pi}{5}$　2.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　3.$8\pi+12\sqrt{3}$　4.(1)$\frac{2}{3}$；(2)$\frac{2\pi}{9}$　5.$4\sqrt{10}$　6.(1)$\frac{125\pi}{6}-25\sqrt{3}$；(2)$\frac{(10+5\sqrt{3})\pi}{3}$　7.$21\sqrt{5}\pi$

8.$\frac{1}{3}$　9.225°　10.$\frac{90}{7}$　11.$\frac{13}{16}$　12.$\frac{11}{5}$　13.(1)$-\frac{12}{5}$；(2)$\frac{24}{7}$　14.$\frac{2}{3}$

- << 解 析 >> -

一、 多重選擇題：每題 8 分，共 32 分

1.$\boxed{\text{解析}}$：$\cos\theta=-\frac{3}{5}\Rightarrow\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm\frac{4}{5}$

(A)○：$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\pm\frac{4}{3}$，可能為$\frac{4}{3}$

(B)○：$\sin2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=\pm\frac{24}{25}$，可能為$-\frac{24}{25}$

(C)○：$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$，可能為$-\sqrt{\frac{1}{5}}$

(D)╳：$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\left(-\frac{3}{5}\right)^3-3\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{117}{125}$

(E)○：$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{8}{5}}{\pm\frac{4}{5}}=\pm2$

故選(A)(B)(C)(E)

2.$\boxed{\text{解析}}$：$\because0<\theta<\frac{\pi}{4}$　$\therefore\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 皆為正數

(A)○：$0<\theta<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan\theta<1\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<1\Rightarrow\sin\theta<\cos\theta$

(B)╳：$\tan\theta-\sin\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta=\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$　$\because0<\cos\theta<1$　$\therefore\frac{1}{\cos\theta}-1>0$　$\therefore\tan\theta-\sin\theta>0\Rightarrow\tan\theta>\sin\theta$

(C)╳：$\cos\theta-\tan\theta=\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\sin^2\theta-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}{\cos\theta}$

$\because0<\theta<\frac{\pi}{4}\Rightarrow0<\sin\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}$　$\therefore\cos\theta-\tan\theta$ 有可能大於 0 $\left(\text{例：}\theta=\frac{\pi}{6}\text{，}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{，但 }\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(D)╳：$0<\theta<\frac{\pi}{4}\Rightarrow0<2\theta<\frac{\pi}{2}$　$\tan2\theta$ 有可能大於 1，即$\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}$有可能大於 1　$\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}>1\Rightarrow\sin2\theta>\cos2\theta$

(E)○：$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}>2\tan\frac{\theta}{2}$　$\left(\because0<1-\tan^2\frac{\theta}{2}<1\right)$　$\therefore\tan\frac{\theta}{2}<\frac{1}{2}\tan\theta$

故選(A)(E)

3.$\boxed{\text{解析}}$：(A)○：由$\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}>\frac{c}{2R}$得 $\sin A+\sin B>\sin C$

(B)╳：$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=2:3:4$　令 $a=2\ell$，$b=3\ell$，$c=4\ell$

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4\ell^2+9\ell^2-16\ell^2}{12\ell^2}=-\frac{1}{4}<0\Rightarrow\angle C>90^\circ$

(C)╳：$\sin A\sin B<\cos A\cos B$　　$\cos A\cos B-\sin A\sin B>0\Rightarrow\cos(A+B)>0$　$\Rightarrow\angle A+\angle B<90^\circ$，則$\angle C>90^\circ$為鈍角三角形

(D)○：$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$　$\Rightarrow a^2+b^2<c^2$　$\therefore\triangle ABC$ 為鈍角三角形

(E)╳：由$\frac{1}{\sin30^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}\Rightarrow\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}\Rightarrow\sin C=\frac{1}{\sqrt{2}}$　　因此$\angle C=45^\circ$或 135°

故選(A)(D)

4.解析:(1) $\tan B=1$,$\tan C=2\Rightarrow \sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\sin C=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,$\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

所以 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

(2)由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow \dfrac{a}{\frac{3}{\sqrt{10}}}=\dfrac{100}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Rightarrow a=60\sqrt{5}$

故選(A)(C)

二、 填充題:每格 5 分,共 85 分

1.解析:設 θ_1 為時針與 12 點鐘方向夾角,θ_2 為分針與時針夾角

則 $\theta_1=2\pi\times\dfrac{4}{12}+2\pi\times\dfrac{1}{12}\times\dfrac{48}{60}=\dfrac{4}{5}\pi$

$\theta_1+\theta_2=2\pi\times\dfrac{48}{60}=\dfrac{8\pi}{5}$ $\quad\therefore\theta_2=\dfrac{8\pi}{5}-\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{4\pi}{5}$

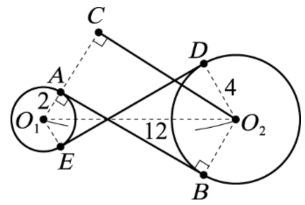
2.解析:$\cos44^\circ\sin164^\circ-\sin224^\circ\cos344^\circ=\cos44^\circ\sin(180^\circ-16^\circ)-\sin(180^\circ+44^\circ)\cos(360^\circ-16^\circ)$

$=\cos44^\circ\sin16^\circ-(-\sin44^\circ)\cos16^\circ=\sin16^\circ\cos44^\circ+\cos16^\circ\sin44^\circ=\sin(16^\circ+44^\circ)=\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3.解析:如圖所示,

$\overline{AB}$,$\overline{DE}$ 為內公切線段,$\overline{AB}\,//\,\overline{CO_2}$,可得 $\overline{AB}=\overline{DE}=\overline{CO_2}=\sqrt{12^2-(2+4)^2}=6\sqrt{3}$,

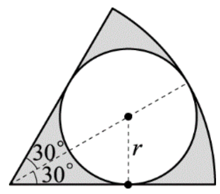
$\angle AO_1O_2=\angle EO_1O_2=\angle BO_2O_1=\angle DO_2O_1=\dfrac{\pi}{3}$,$\Rightarrow$所求為 $2\times6\sqrt{3}+2\times\dfrac{4\pi}{3}+4\times\dfrac{4\pi}{3}=12\sqrt{3}+8\pi$(公尺)



4.解析:

(1)設內切圓半徑為 $r\Rightarrow\dfrac{r}{2-r}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow r=\dfrac{2}{3}$

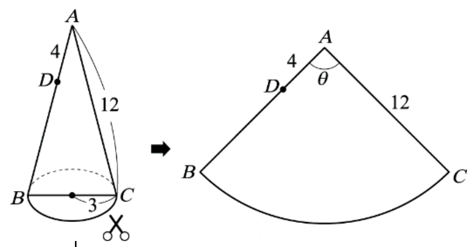
(2)所求為 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}\times2^2-\pi\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{2\pi}{9}$



5.解析:

剪開後的扇形弧長為剪開前的底圓周長,設剪開後的扇形之圓心角為 θ

$\Rightarrow 2\pi\times3=12\theta\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow$所求為 $\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$

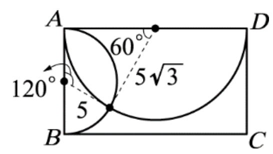


6.解析:

(1)所求為 $\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{3}\times5^2-\dfrac{1}{2}\times5^2\times\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)+\left[\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}\times(5\sqrt{3})^2-\dfrac{1}{2}\times(5\sqrt{3})^2\times\sin\dfrac{\pi}{3}\right]$

$=25\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)+75\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{125\pi}{6}-25\sqrt{3}$

(2)所求為 $5\times\dfrac{2\pi}{3}+5\sqrt{3}\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{(10+5\sqrt{3})\pi}{3}$



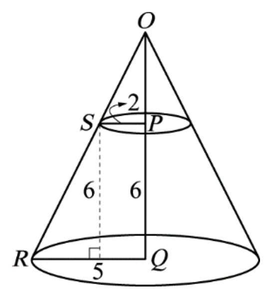
7.解析:將題圖補成圓錐,如圖所示

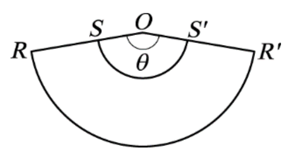
$\cos\angle ORQ=\dfrac{(5-2)}{\sqrt{(5-2)^2+6^2}}=\dfrac{3}{3\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\overline{RQ}}{\overline{OR}}=\dfrac{\overline{SP}}{\overline{OS}}$

$\because\overline{OR}=\sqrt{5}\,\overline{RQ}=5\sqrt{5}$,$\overline{OS}=\sqrt{5}\,\overline{SP}=2\sqrt{5}$

將此圓錐展開,設圓心角為 θ 則 $2\pi\times2=2\sqrt{5}\times\theta\Rightarrow\theta=\dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}$

$\therefore$所求為扇形 $ORR'-$扇形 $OSS'=\dfrac{1}{2}\times(5\sqrt{5})^2\times\dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{5})^2\times\dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}=21\sqrt{5}\pi$

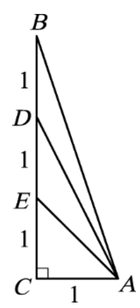




8.解析:如圖

$\angle DAE=\angle DAC-\angle EAC\Rightarrow\tan\angle DAE=\tan(\angle DAC-\angle EAC)$

$=\dfrac{\tan\angle DAC-\tan\angle EAC}{1+\tan\angle DAC\cdot\tan\angle EAC}=\dfrac{2-1}{1+2\times1}=\dfrac{1}{3}$

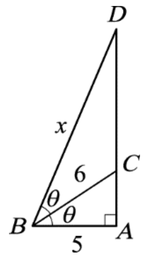


9.解析：$180^\circ<\alpha<270^\circ$，且 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt5}\Rightarrow\cos\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt5}$　　$0^\circ<\beta<90^\circ$，且 $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\Rightarrow\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\left(-\dfrac{2}{\sqrt5}\right)\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)-\left(-\dfrac{1}{\sqrt5}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt2}$

又 $180^\circ<\alpha+\beta<360^\circ$，故 $\alpha+\beta=180^\circ+45^\circ=225^\circ$

10.解析：設 $\angle CBA=\theta$，$\cos\theta=\dfrac{5}{6}$，設 $\overline{BD}=x$ 則 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^2-1=\dfrac{7}{18}$　即 $\dfrac{5}{x}=\dfrac{7}{18}\Rightarrow x=\dfrac{90}{7}$



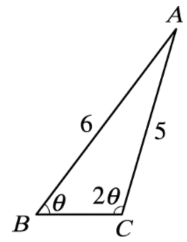
11.解析：$\cos4\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow1-2\sin^22\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sin^22\theta=\dfrac{1}{4}$

$\sin^6\theta+\cos^6\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=1-\dfrac{3}{4}(\sin^22\theta)=1-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{16}$

12.解析：正弦定理：$\dfrac{5}{\sin\theta}=\dfrac{6}{\sin2\theta}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin(180^\circ-3\theta)}\Rightarrow\dfrac{5}{\sin\theta}=\dfrac{6}{2\sin\theta\cdot\cos\theta}=\dfrac{\overline{BC}}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}\Rightarrow\dfrac{5}{1}=\dfrac{6}{2\cos\theta}=\dfrac{\overline{BC}}{3-4\sin^2\theta}$

由 $\dfrac{5}{1}=\dfrac{6}{2\cos\theta}$ 得 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}\therefore\dfrac{5}{1}=\dfrac{\overline{BC}}{3-4\times\dfrac{16}{25}}\Rightarrow\overline{BC}=5\times\left(3-\dfrac{64}{25}\right)=\dfrac{11}{5}$



13.解析：(1)∵$\sin\theta$，$\cos\theta$ 為 $5x^2-x+k=0$ 之兩根　∴$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{5}$

由 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{25}$　$\Rightarrow1+2\times\dfrac{k}{5}=\dfrac{1}{25}\Rightarrow k=-\dfrac{12}{5}$

(2)由(1)知原方程式為 $5x^2-x-\dfrac{12}{5}=0$　$\Rightarrow25x^2-5x-12=0\Rightarrow(5x-4)(5x+3)=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{4}{5}$ 或 $-\dfrac{3}{5}$，又 $0^\circ<\theta<180^\circ$　∴$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}\Rightarrow\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$　故 $\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)}{1-\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{24}{7}$

14.解析：∵$\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{13}{7}=\dfrac{13k}{7k}$

$$\therefore\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1-\tan^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{1-\left(\dfrac{\sqrt6}{2}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sqrt6}{2}\right)^2}=-\frac{1}{5}$$

$\Rightarrow7k-13k=-6k=-\dfrac{1}{5}\Rightarrow k=\dfrac{1}{30}$　故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=20k=\dfrac{2}{3}$