達人 高中教育の專門家

1-2&4 三角函數複習考

單元:函數圖形、疊合

20220930&1001
高二龍哥數A
姓名:________

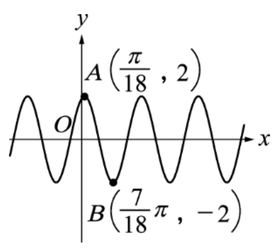
多重選擇題：每題 8 分，共 32 分

1. (　　)下列哪些函數的最小正週期為 π？
(A) $\sin x+\cos x$　(B) $\sin x-\cos x$　(C) $|\sin x+\cos x|$　(D) $|\sin x-\cos x|$　(E) $|\sin x|+|\cos x|$

2. (　　)關於函數 $y=f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sin x$，請問下列各敘述何者為真？
(A)函數 $y=f(x)$ 的週期為 π
(B)函數 $y=f(x)$ 的圖形振幅為 1
(C)函數 $y=f(x)$ 的最大值為 $\sqrt{7}$
(D)在 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ 時，$y=f(x)$ 的圖形為遞減
(E)把 $y=\sin x$ 的圖形向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 後，可得 $y=f(x)$ 圖形

3. (　　)有關 $y=f(x)=3\sin 2x-4\cos 2x$ 之圖形，下列敘述何者正確？
(A)週期為 π
(B) $-5\leqq f(x)\leqq 5$
(C)圖形過 $\left(\frac{\pi}{4},-4\right)$
(D)其圖可由 $y=\sin x$ 的圖形平移得來
(E)與 x 軸有無限個交點

4. (　　)附圖為 $f(x)=a\sin(cx)+b\cos(cx)$ 圖形之一部分，其中 A 為波峰，B 為波谷且 $c>0$。請問下列何者正確？
(A) $a^2+b^2=2$
(B) $0<b-a<1$
(C) $c=3$
(D) $f(x)=f(x+2\pi)$ 恆成立
(E)由 $y=2\sin(cx)$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 可得 $y=f(x)$ 的圖形



填充題：每格 5 分，共 85 分

1. $\frac{\sqrt{3}}{\cos 290^\circ}+\frac{1}{\sin 250^\circ}=$【　　　　】

2. 設 $180^\circ<A<270^\circ$，且 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2\cos 2012^\circ$，若 $A=m^\circ$，則 $m=$【　　　　】

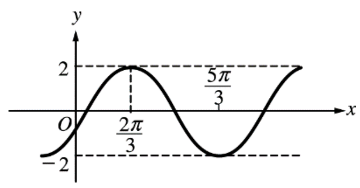
3. 設 $-\pi\leqq\theta<\pi$，且 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1=0$，則 $\theta=$【　　　　】。

4. 將 $y=\sin x$ 先左移 1，上移 2，再左右伸縮 2 倍，上下伸縮 2 倍，所得的新函數方程式為 $y=a\sin(bx+c)+d$，求序組 $(a, b, c, d)=$【　　　　】

5. 方程式 $\sin x-3\cos x=k$，在 $0\leqq x\leqq\pi$ 的範圍內，有兩個相異的實數解，求實數 k 的範圍為【　　　　】

6. 方程式 $\sin x + |\sin x| = \dfrac{x}{5}$ 的實數解個數有【　　　　】個

7. 附圖是曲線 $y = a\sin x + b\cos x$ 圖形的一部分，
則 y 之週期為【　　　　】，a=【　　　　】，b=【　　　　】

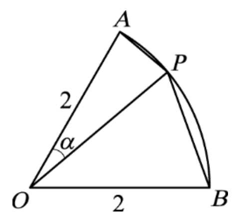


8. 已知 $0 \leqq x \leqq \pi$，則當 x=【　　　　】時，$y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ 有最小值

9. 函數 $f(x) = \sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x$，且 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，則 $x = a$ 時，$f(x)$ 有最小值 b，
試求數對 (a, b)=【　　　　】

10. 設 $0 \leqq x \leqq \pi$，若 $y = \sin 2x - \sin x - \cos x + 4$ 之最大值 M，最小值 m，則數對 (M, m)=【　　　　】

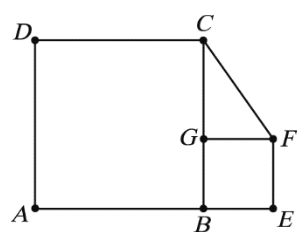
11. 如圖所示，扇形 OAB 的半徑為 2，$\angle AOB = 60^\circ$，若 P 為 $\overset{\frown}{AB}$ 上一點，$\angle AOP = \alpha$，
則四邊形 $OAPB$ 面積的最大值為【　　　　】



12. 若 P 為 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ 上的任一點，令 O 點為原點，Q 為 $(3, -4)$，則 $\triangle POQ$ 面積的最大值為【　　　　】。

13. x 為實數，$f(x) = \dfrac{\cos x - 2}{\sin x + \cos x - 3}$ 的最大值為【　　　　】，最小值為【　　　　】

14. 如圖，有兩正方形 $ABCD$ 與 $BEFG$ 的面積和為 1，A，B，E 三點共線，若 $\overline{BC} \perp \overline{GF}$，
則 $\triangle GFC$ 面積的最大值為【　　　　】



一、 多重選擇題：每題 8 分，共 32 分

1.(C)(D)

2.(B)(D)

3.(A)(B)(E)

4.(B)(C)(D)

二、 填充題：每格 5 分，共 85 分

1.4

2.242

3.$\frac{-\pi}{2}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$

4.$\left(2,\frac{1}{2},1,4\right)$

5.$3\leqq k<\sqrt{10}$

6.4

7.2π ；$\sqrt{3}$ ；-1

8.$\frac{\pi}{6}$

9.（0，-1）

10.$\left(5,\frac{11}{4}\right)$

11.2

12.$\frac{13}{2}$

13.1；$\frac{3}{7}$

14.$\frac{\sqrt{2}-1}{4}$

<< 解 析 >>

一、 多重選擇題：每題 8 分，共 32 分

1.解析：(A) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，週期為 2π

(B) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，週期為 2π

(C) $|\sin x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$，週期與 $|\sin x|$ 相同為 π

(D) $|\sin x-\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$，週期與 $|\sin x|$ 相同為 π

(E) $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$

$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|-\sin x|=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$，週期為 $\frac{\pi}{2}$

故選(C)(D)

2.解析：$y=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sin x=\sqrt{3}\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\frac{1}{2}\right)-2\sin x=\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\cdot\frac{1}{2}=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ 因此

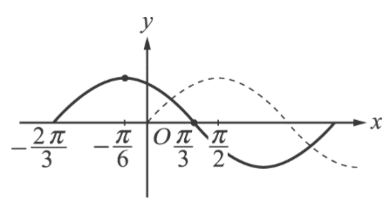
(A)╳：週期為 2π

(B)○：振幅為 1

(C)╳：最大值為 1

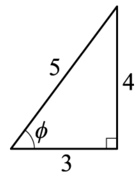
(D)○：$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ 時，$y=f(x)$ 的圖形為遞減

(E)╳：$y=f(x)$ 之圖形為 $y=\sin x$ 向左平移 $\frac{2\pi}{3}$



故選(B)(D)

3.解析：$f(x)=5\left(\dfrac{3}{5}\sin 2x-\dfrac{4}{5}\cos 2x\right)$ 設 $\cos\phi=\dfrac{3}{5}$，$\sin\phi=\dfrac{4}{5}$



$f(x)=5(\sin 2x\cos\phi-\cos 2x\sin\phi)=5\sin(2x-\phi)$

(A)○：週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(B)○：$\because -1\leqq\sin(2x-\phi)\leqq 1$ $\therefore -5\leqq 5\sin(2x-\phi)\leqq 5$　$-5\leqq f(x)\leqq 5$

(C)╳：$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=5\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{4}-\phi\right)=5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)=5\cos\phi=3$　故圖形不過 $\left(\dfrac{\pi}{4},-4\right)$

(D)╳：$y=f(x)$ 之圖形可由 $y=\sin 2x$ 或 $y=\cos 2x$ 之圖形平移得來

(E)○：當 $2x-\phi=k\pi$，$k\in Z$ 時，$y=f(x)=0$　即當 $x=\dfrac{\phi}{2}+\dfrac{k\pi}{2}$，$k\in Z$ 時，$y=f(x)$ 與 x 軸相交

故 $y=f(x)$ 與 x 軸有無限個交點

故選(A)(B)(E)

4.解析：$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(cx)+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(cx)\right)$　設 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\phi$，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\phi$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{a^2+b^2}(\sin(cx)\cos\phi+\cos(cx)\sin\phi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(cx+\phi)$

由題圖可知：$\sqrt{a^2+b^2}=2$，$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{c}=\dfrac{7\pi}{18}-\dfrac{\pi}{18}$，$c\times\dfrac{\pi}{18}+\phi=\dfrac{\pi}{2}$，$c\times\dfrac{7\pi}{18}+\phi=\dfrac{3\pi}{2}$　$\Rightarrow a^2+b^2=4$，$c=3$，$\phi=\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow a=\sqrt{a^2+b^2}\cos\phi=1$，$b=\sqrt{a^2+b^2}\sin\phi=\sqrt{3}$

(A)╳：$a^2+b^2=4$

(B)○：$b-a=\sqrt{3}-1\Rightarrow 0<b-a<1$

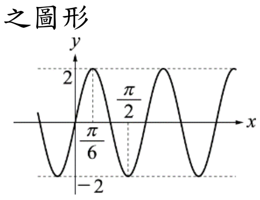
(C)○：$c=3$

(D)○：$f(x)=a\sin(cx)+b\cos(cx)=\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x$

$f(x+2\pi)=\sin(3(x+2\pi))+\sqrt{3}\cos(3(x+2\pi))=\sin(3x+6\pi)+\sqrt{3}\cos(3x+6\pi)$

$=\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=f(x)$

(E)╳：由 $y=2\sin(cx)=2\sin 3x$ 之圖形如圖：即 $y=2\sin(cx)$ 之圖形向左平移 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{18}=\dfrac{\pi}{9}$ 可得 $y=f(x)$ 之圖形



故選(B)(C)(D)

二、 填充題：每格 5 分，共 85 分

1.解析：$\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 290^\circ}+\dfrac{1}{\sin 250^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 70^\circ}-\dfrac{1}{\sin 70^\circ}=\dfrac{2(\sqrt{3}\sin 70^\circ-\cos 70^\circ)}{2\sin 70^\circ\cos 70^\circ}=\dfrac{4\sin(70^\circ-30^\circ)}{\sin 140^\circ}=\dfrac{4\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ}=4$

2.解析：$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2\left(\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=2(\sin A\cos 60^\circ+\cos A\sin 60^\circ)=2\sin(A+60^\circ)$，其中 $240^\circ<A+60^\circ<330^\circ$

而 $2\cos 2012^\circ=2\cos 212^\circ=-2\cos 32^\circ=-2\sin 58^\circ=2\sin(360^\circ-58^\circ)=2\sin 302^\circ$

因此 $A+60^\circ=302^\circ\Rightarrow A=242^\circ$ 即 $m=242$

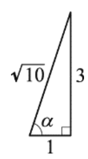
3.解析：$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1=0\Rightarrow 2\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+1=0\Rightarrow 2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1\Rightarrow\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$

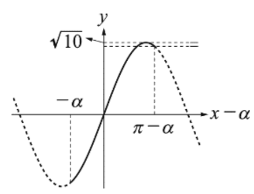
又 $-\pi\leqq\theta\leqq\pi\Rightarrow -\dfrac{2\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{4\pi}{3}$，所以 $\theta+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{7\pi}{6}\Rightarrow\theta=\dfrac{-\pi}{2}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$

4.解析：$y=\sin x$ 左移 1，上移 2 $\Rightarrow y=\sin(x+1)+2$　左右伸縮 2 倍，上下伸縮 2 倍 $\Rightarrow\dfrac{y}{2}=\sin\left(\dfrac{x}{2}+1\right)+2\Rightarrow y=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+1\right)+4$

故序組 $(a,b,c,d)=\left(2,\dfrac{1}{2},1,4\right)$

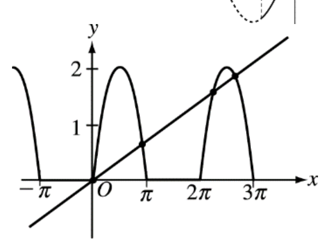
5.解析：$y=\sin x-3\cos x=\sqrt{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\sin x-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\cos x\right)=\sqrt{10}\sin(x-\alpha)$，其中 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$





由 $0\leqq x\leqq\pi$ 知 $-\alpha\leqq x-\alpha\leqq\pi-\alpha$　如圖，$y=k$ 與曲線有兩交點時　$\sqrt{10}\sin(\pi-\alpha)\leqq k<\sqrt{10}$，

而 $\sqrt{10}\sin(\pi-\alpha)=\sqrt{10}\sin\alpha=\sqrt{10}\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}=3$　$\Rightarrow 3\leqq k<\sqrt{10}$



6.解析:方程式 $\sin x+|\sin x|=\dfrac{x}{5}$ 的實數解個數 同兩圖形 $\begin{cases} y=\sin x+|\sin x| \\ y=\dfrac{x}{5} \end{cases}$ 的交點個數

由圖可知兩圖形有四個交點 故原方程式有 4 個實根

7.解析:(1)由曲線圖形知:週期為 $\left(\dfrac{5\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\right)\times 2=2\pi$

(2)由振幅 $\sqrt{a^2+b^2}=2$ 得 $a^2+b^2=4$ 另外,將點 $\left(\dfrac{2\pi}{3},2\right)$ 代入,得 $a\sin\dfrac{2\pi}{3}+b\cos\dfrac{2\pi}{3}=2$,即 $\sqrt{3}a-b=4$

解 $\begin{cases} \sqrt{3}a-b=4 \\ a^2+b^2=4 \end{cases}$,得 $a=\sqrt{3}$,$b=-1$

8.解析:$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x\right)-2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{3}{2}\cos x=-\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

又 $\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{4}{3}\pi$ ∴當 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 時,$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 有最大值 1 $\Rightarrow y$ 有最小值 $-\sqrt{3}$

9.解析:$f(x)=\sin^2x+2\sin x\cos x-\cos^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x-\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

當 $x=0$ 時,$f(0)=\sqrt{2}\times\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1$ 為最小值 故數對 $(a,b)=(0,-1)$

10.解析:令 $\sin x+\cos x=t$,則 $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,其中 $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5\pi}{4}$ $\Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1\Rightarrow -1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

又 $t^2=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$ 因此 $y=t^2-1-t+4=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$

(1)當 $t=\dfrac{1}{2}$ 時,y 有最小值 $m=\dfrac{11}{4}$ (2)當 $t=-1$ 時,y 有最大值 $M=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}=5$ 故數對 $(M,m)=\left(5,\dfrac{11}{4}\right)$

11.解析:四邊形 $OAPB$ 面積=△OAP 面積+△OPB 面積 $=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin(60^\circ-\alpha)$,$0^\circ<\alpha<60^\circ$

$=2\sin\alpha+2(\sin 60^\circ\cos\alpha-\sin\alpha\cos 60^\circ)=2\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin(\alpha+60^\circ)$

$\because 0^\circ<\alpha<60^\circ\Rightarrow 60^\circ<\alpha+60^\circ<120^\circ\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin(\alpha+60^\circ)\leqq 1$ ∴當 $\sin(\alpha+60^\circ)=1$ 時,四邊形面積有最大值為 2

12.解析:∵P 為 $x^2+(y-1)^2=4$ 上之點 ∴令 $P(2\cos\theta,1+2\sin\theta)$,$O(0,0)$,$Q(3,-4)$

$\triangle POQ=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & -4 & 1+2\sin\theta & 0 \end{vmatrix}\right|=\left|\dfrac{3+6\sin\theta+8\cos\theta}{2}\right|=\left|4\cos\theta+3\sin\theta+\dfrac{3}{2}\right|\leqq\sqrt{4^2+3^2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{2}$

13.解析:設 $\dfrac{\cos x-2}{\sin x+\cos x-3}=k\Rightarrow k\sin x+(k-1)\cos x=3k-2$,$x\in R$ 又 $|k\sin x+(k-1)\cos x|\leqq\sqrt{k^2+(k-1)^2}$

$\Rightarrow|3k-2|\leqq\sqrt{2k^2-2k+1}\Rightarrow(3k-2)^2\leqq 2k^2-2k+1\Rightarrow 7k^2-10k+3\leqq 0$ 得 $\dfrac{3}{7}\leqq k\leqq 1$ 故最大值為 1,最小值為 $\dfrac{3}{7}$

14.解析:設 $\overline{AB}=x$,$\overline{BE}=y$ 則 $x^2+y^2=1$ 令 $x=\cos\theta$,$y=\sin\theta$,$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

則 $\triangle GFC=\dfrac{1}{2}xy(x-y)=\dfrac{1}{2}\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 2\theta}{2}-\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(\sin 2\theta+\cos 2\theta-1)$

$=\dfrac{1}{4}\left[\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-1\right]$

當 $2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$,$\theta=\dfrac{\pi}{8}$ 時,有最大值 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$