達人 高中教育の專門家

2-1 指數與對數函數小考

20221028&29
高二龍哥數A
姓名:＿＿＿＿＿

一、 多重選擇題：每題 15 分，共 15 分

1.(　　)設 $a>0$，$a\neq 1$，則下列關於函數 $y=f(x)=a^x$ 之敘述哪些是正確的？

(A)若 $x_1>x_2$，則 $f(x_1)>f(x_2)$

(B)圖形恆過點 $(0,1)$

(C)圖形與直線 $y=k$（k 為實數）恰有一個交點

(D)若 $x_1\neq x_2$，則 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

(E)設 $g(x)=b^x$，其中 $b>a$，$b\neq 1$，則對於任意實數 t 滿足 $g(t)>f(t)$

二、 填充題：每題 17 分，共 85 分

1. 若方程式 $2^{-|x|}+k-1=0$ 有實根，則實數 k 的範圍為【　　　　】

2. 已知 $y=3^x$ 的圖形中，若 P，Q 分別為直線 $y=4$，$y=12$ 與 $y=3^x$ 的交點，求 $\overline{PQ}$ 的長為【　　　　】

3. 解方程式 $2^{1-x}-33\times 2^{-\frac{x}{2}-2}+1=0$，則 $x=$【　　　　】

4. 求解：$8(4^x+4^{-x})-46(2^x+2^{-x})+67=0$，得 $x=$【　　　　】

5. 若方程式 $4^{x+1}-5\cdot 2^{x+2}+\sqrt{8}=0$ 之兩根為 α、β，則 $\alpha+\beta=$【　　　　】

一、 多重選擇題：每題 15 分，共 15 分

1.(B)(D)

二、 填充題：每題 17 分，共 85 分

1.$0\leqq k<1$　　2.$\sqrt{65}$　　3.6 或 -4　　4.± 2　　5.$-\dfrac{1}{2}$

\- << 解 析 >> -

一、 多重選擇題：每題 15 分，共 15 分

1.解析：$a>0$，$a\neq 1$，$y=f(x)=a^x$

(A) ╳：若 $0<a<1$ 時，$f(x)$ 為遞減函數　$\therefore x_1>x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

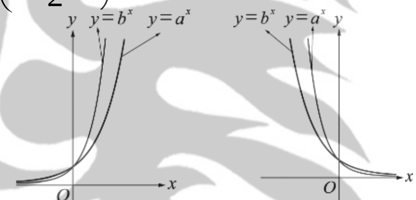
(B) ○：$\because f(0)=a^0=1$　$\therefore f(x)$ 的圖形恆過 $(0,1)$

(C) ╳：$\because a^x>0$ 恆成立，即 $f(x)$ 的圖形恆在 x 軸上方，則當 $y=k<0$ 時，兩圖形沒有交點

(D) ○：指數函數圖形凹口恆向上　$\therefore \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 恆成立

(E) ╳：①若 $b>a>1$　　當 $t<0$ 時，$g(t)<f(t)$

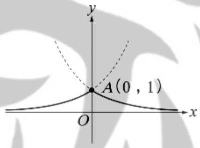
②若 $0<a<b<1$　　當 $t<0$ 時，$g(t)<f(t)$



故選(B)(D)

二、 填充題：每題 17 分，共 85 分

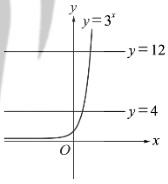
1.解析：視兩函數 $\begin{cases} y=2^{-|x|} \\ y=1-k \end{cases}$ 之圖形的相交情形　有實根 $\Rightarrow 0<1-k\leqq 1$



$\Rightarrow -1\leqq k-1<0$　$\Rightarrow 0\leqq k<1$

2.解析：設 $P(x_1，4)$，$Q(x_2，12)$，則 $3^{x_1}=4$，$3^{x_2}=12\Rightarrow 3^{x_2-x_1}=\dfrac{12}{4}=3\Rightarrow x_2-x_1=1$

$\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(12-4)^2}=\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{65}$



3.解析：原式 $\Rightarrow 2\cdot(2^{-\frac{x}{2}})^2-\dfrac{33}{4}\cdot(2^{-\frac{x}{2}})+1=0\Rightarrow 8(2^{-\frac{x}{2}})^2-33(2^{-\frac{x}{2}})+4=0$

$\Rightarrow(8\cdot 2^{-\frac{x}{2}}-1)(2^{-\frac{x}{2}}-4)=0\Rightarrow 2^{-\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{8}$ 或 4　$\Rightarrow -\dfrac{x}{2}=-3$ 或 $2\Rightarrow x=6$ 或 -4

4.解析：令 $t=2^x+2^{-x}$（由算幾不等式可知 $\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\geqq\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}\Rightarrow t\geqq 2$）則 $4^x+4^{-x}=t^2-2$

故原方程式 $8t^2-46+51=0\Rightarrow(2t-3)(4t-17)=0.\therefore t=\dfrac{17}{4}$ 或 $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}\text{ 不合 }\because t\geqq 2\right)$

故 $2^x+2^{-x}=\dfrac{17}{4}$ 同乘 $4\cdot 2^x\Rightarrow 4(2^x)^2-17(2^x)+4=0\Rightarrow(4\cdot 2^x-1)(2^x-4)=0\Rightarrow 2^x=\dfrac{1}{4}$ 或 4，

故 $x=\pm 2$

5.解析：$4^{x+1}-5\cdot 2^{x+2}+\sqrt{8}=0$，根為 α，$\beta\Rightarrow 4\cdot(2^x)^2-20(2^x)+\sqrt{8}=0$

設 $t=2^x\Rightarrow 4t^2-20t+\sqrt{8}=0$，根為 2^α，2^β　由根與係數的關係可知 $\begin{cases} 2^\alpha+2^\beta=5 \\ 2^\alpha\cdot 2^\beta=\dfrac{\sqrt{8}}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow 2^{\alpha+\beta}=2^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow\alpha+\beta=-\dfrac{1}{2}$