2-1~2 指數與對數函數小考

20221104&05
高二龍哥數 A
姓名:__________

一、 填充題：每題 15 分，共 105 分

1. 設 x，y，z 為正數且 $2^x=7^y=13^z$，則 x，$3y$，$4z$ 的大小關係為【　　　　】

2. 若 $x>0$，不等式 $x^{2x^2+3}\geqq x^{7x}$ 之解為【　　　　】

3. 設 $f(x)=4\cdot 3^x-9^x$，且 $-1\leqq x\leqq 2$，若 $f(x)$ 的最大值為 M，最小值為 m，
則數對 $(M, m)=$【　　　　】

4. 設 x 為實數，求 $f(x)=(3^x+4)^2+(3^{-x}+4)^2-10$ 的最小值為【　　　　】

5. 心理學家常用數學模式 $L(t)=a\cdot(1-10^{-b\cdot t})$ 來描述學生經過 t 星期學習之後所得到的學習量（或成果），這裡的常數 a 與 b 跟學生及學習的科目相關。
如果大雄一星期可以背熟 80 個單字，兩星期可以背熟 140 個單字，那麼利用這個數學模式，推算大雄三星期可以背熟【　　　　】個單字

6. 對任意實數 x，$\log_{(a+2)}(x^2-ax+9)$ 恆有意義，則 a 的範圍為【　　　　】

7. 化簡 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{4}{7}-\frac{4}{3}\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{8}+\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{343}=$【　　　　】

一、 填充題：每題 15 分，共 105 分

1.$x<3y<4z$

2.$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ 或 $x\geqq 3$

3.（4，−45）

4.40

5.185

6.$-2<a<6$，但 $a\neq -1$

7.0

- << 解 析 >> -

1.解析：$2^x=7^y=13^z\Rightarrow 2^x=(7^{\frac{1}{3}})^{3y}=(13^{\frac{1}{4}})^{4z}$ 但 $2^3>7\Rightarrow 2>7^{\frac{1}{3}}\Rightarrow x<3y$……①

又 $7^4>13^3\Rightarrow(7^4)^{\frac{1}{12}}>(13^3)^{\frac{1}{12}}\Rightarrow 7^{\frac{1}{3}}13^{\frac{1}{4}}\Rightarrow 3y<4z$………② 由①、②知 $x<3y<4z$

2.解析：(1) $0<x<1$ 時，$2x^2+3\leqq 7x\Rightarrow\frac{1}{2}\leqq x\leqq 3$ $\therefore\frac{1}{2}\leqq x<1$ (2) $x=1$ 時，$1\geqq 1$ 成立

(3) $x>1$ 時，$2x^2+3\geqq 7x\Rightarrow x\geqq 3$ 或 $x\leqq\frac{1}{2}$ $\therefore x\geqq 3$ 由(1)、(2)、(3)得 $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ 或 $x\geqq 3$

3.解析：令 $3^x=t$，得 $3^{-1}\leqq t\leqq 3^2\Rightarrow\frac{1}{3}\leqq t\leqq 9$ 則 $f(x)=4t-t^2=-(t-2)^2+4$，$\frac{1}{3}\leqq t\leqq 9$

$\Rightarrow$當 $t=2$ 時，$f(x)$ 有最大值 4；當 $t=9$ 時，$f(x)$ 有最小值 −45

所以數對 $(M，m)=(4，-45)$

4.解析：$f(x)=3^{2x}+8\times 3^x+16+3^{-2x}+8\times 3^{-x}+16-10=(3^{2x}+3^{-2x})+8(3^x+3^{-x})+22$

$=[(3^x+3^{-x})+4]^2+22-16-2\geqq 6^2+4=40$（$\because 3^x+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$）

5.解析：$\begin{cases}80=L(1)=a(1-10^{-b})\\140=L(2)=a(1-10^{-2b})\end{cases}\Rightarrow\frac{80}{140}=\frac{a(1-k)}{a(1-k^2)}$ （令 $10^{-b}=k$）$\Rightarrow\frac{4}{7}=\frac{1}{1+k}$ $(k\neq 1)$

$\Rightarrow 4+4k=7\Rightarrow k=\frac{3}{4}$，代回求 a $\Rightarrow a=320$

則所求 $L(3)=a(1-10^{-3b})=320\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]=320\times\left(\frac{37}{64}\right)=185$

6.解析：底數>0 且底數≠1 $\Rightarrow a>-2$ 且 $a\neq -1$………①

真數>0 $\Rightarrow x^2-ax+9>0$ 恆成立 $\Rightarrow$ 判別式 $a^2-36<0\Rightarrow -6<a<6$ ………②

由①、②得 $-2<a<6$，但 $a\neq -1$

7.解析：$\log_{\frac{1}{3}}\frac{4}{7}-\frac{4}{3}\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{8}+\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{343}$

$=\log_{\frac{1}{3}}\frac{4}{7}-\log_{\frac{1}{3}}(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}}+\log_{\frac{1}{3}}(7^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$

$=\log_{\frac{1}{3}}\frac{4}{7}-\log_{\frac{1}{3}}4+\log_{\frac{1}{3}}7=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{4}{7}\times\frac{1}{4}\times 7\right)=\log_{\frac{1}{3}}1=0$