

一、填充題：每題 15 分，共 105 分

1. $(\log_2 3 + \log_8 27)(\log_3 4 + \log_9 \sqrt{2})(\log_4 8 + \log_4 \sqrt[4]{8}) = \text{【 } \quad \text{】}$

2. $5^{\frac{1}{\log 5}} + 3^{\frac{\log 4}{2 \log 3}} + 16^{\frac{\log 3 + \log 5}{\log 4}} = \text{【 } \quad \text{】}$

3. 設 $\log_3 2 = a$, $\log_7 3 = b$, 試以 a, b 表示 $\log_{84} 48 = \text{【 } \quad \text{】}$

4. 已知 $\log 18 = a$, $\log 24 = b$, 且 $\log 72 = \frac{x \times a + y \times b}{5}$, 其中 x, y 為整數, 則 $x + y = \text{【 } \quad \text{】}$

5. 將 $y = \log_5 x$ 的圖形沿 x 軸正方向移動 a , 再沿 y 軸正方向移動 b , 可得 $y = \log_5 (4x - 3)$ 的圖形, 則 $a = \text{【 } \quad \text{】}$, $b = \text{【 } \quad \text{】}$

6. 方程式 $\log_{\frac{1}{2}} |x| = 2^x$ 之實數解個數為 $\text{【 } \quad \text{】}$ 個

7. 方程式 $7^x + x - 113 = 0$ 的實根為 a , $\log_7 x + x - 113 = 0$ 的實根為 b , 求 $a + b = \text{【 } \quad \text{】}$

一、填充題：每題 15 分，共 105 分

1. $\frac{135}{16}$

2. 237

3. $\frac{4ab+b}{2ab+b+1}$

4. 7

5. $\frac{3}{4}$; $\log_5 4$

6. 2

7. 113

<< 解析 >>

1. 解析：原式 = $(\log_2 3 + \log_2 3) \left(2 \log_3 2 + \frac{1}{4} \log_3 2 \right) \left(\frac{3}{2} \log_2 2 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \log_2 2 \right)$
 $= (2 \log_2 3) \left(\frac{9}{4} \log_3 2 \right) \left(\frac{15}{8} \right) = 2 \times \frac{9}{4} \times \frac{15}{8} = \frac{135}{16}$

2. 解析： $5^{\frac{1}{\log_5 4}} + 3^{\frac{\log_4 3}{2 \log_3 5}} + 16^{\frac{\log_3 3 + \log_5 5}{\log_4 4}} = 5^{\frac{\log_3 3 + \log_5 5}{\log_5 4}} + (3^{\log_3 4})^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{\log_4 15}{\log_4 4}} = 5^{\log_5 10} + (4)^{\frac{1}{2}} + (4^{\log_4 15})^2$
 $= 10 + 2 + 15^2 = 237$

3. 解析： $a = \log_3 2$, $b = \log_7 3 \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_7 3} = \log_3 7$

則 $\log_{84} 48 = \frac{\log_3 48}{\log_3 84} = \frac{\log_3 (2^4 \times 3)}{\log_3 (2^2 \times 3 \times 7)} = \frac{4 \log_3 2 + \log_3 3}{2 \log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 7} = \frac{4a + 1}{2a + 1 + \frac{1}{b}} = \frac{4ab + b}{2ab + b + 1}$

4. 解析： $a = \log 18 = \log 9 + \log 2 = 2 \log 3 + \log 2 \dots \dots \textcircled{1}$ $b = \log 24 = \log 3 + \log 8 = \log 3 + 3 \log 2 \dots \dots \textcircled{2}$

解①、②得 $5 \times \log 2 = 2b - a \quad \therefore \log 2 = \frac{2b - a}{5}$, $\log 3 = \frac{3a - b}{5}$

$\therefore \log 72 = \log 8 + \log 9 = 3 \log 2 + 2 \log 3 = \frac{6b - 3a}{5} + \frac{6a - 2b}{5} = \frac{3a + 4b}{5}$ 即 $x = 3$, $y = 4 \quad \therefore x + y = 7$

5. 解析： $y = \log_5 x$ 的圖形沿 x 軸方向移動 $a \Rightarrow y = \log_5 (x - a)$ 再沿 y 軸正方向移動 b

$\Rightarrow y = [\log_5 (x - a)] + b = \log_5 (x - a) + \log_5 5^b = \log (5^b x - 5^b a) = \log_5 (4x - 3)$

$\Rightarrow \begin{cases} 5^b = 4 \\ 5^b a = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \log_5 4 \end{cases}$

6. 解析：作 $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$ 與 $y = 2^x$ 的圖形，可以得到有 2 個實根

7. 解析：令 $\begin{cases} 7^x + x - 113 = 0 \text{ 的實根為 } a \Rightarrow 7^a = 113 - a \\ \log_7 x + x - 113 = 0 \text{ 的實根為 } b \Rightarrow \log_7 b = 113 - b \end{cases}$ 令三函數 $\begin{cases} y = 7^x \\ y = \log_7 x \\ y = 113 - x \end{cases}$ 得三函數圖形

令 $y = 113 - x$ 的圖形與上述兩函數交於 $A(a, 7^a)$, $B(b, \log_7 b)$ 兩點，

且 \overline{AB} 中點 = \overline{CD} 中點，故 $\frac{a+b}{2} = \frac{0+113}{2} \therefore a+b = 113$

