

一、填充題：每題 20 分，共 100 分

1. 若 $3^{\log x} \cdot x^{\log 3} - 2(3^{\log x} + x^{\log 3}) - 45 = 0$ ，則 $x =$ 【 】
2. 設 $x < 1$ ，則方程式 $x^{2 \log x} = 1000x$ 的解為 【 】
3. 若方程式 $(\log_2 4x) \cdot (\log_2 8x) = 12$ 的兩根為 α 與 β ，試求 $\alpha \cdot \beta =$ 【 】
4. 滿足不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3(\log_5 6x)) > 0$ 的實數 x 範圍為 【 】
5. $1 \leq x \leq 1000$ ， $f(x) = x^{2 - \log x}$
 - (1) $x =$ 【 】 時， $f(x)$ 有最小值 【 】
 - (2) $x =$ 【 】 時， $f(x)$ 有最大值 【 】

一、填充題：每題 20 分，共 100 分

1. 100

2. $\frac{1}{10}$

3. $\frac{1}{32}$

4. $\frac{5}{6} < x < \frac{125}{6}$

5. (1) 1000 ; $\frac{1}{1000}$; (2) 10 ; 10

----- << 解析 >> -----

1. **解析** : 令 $3^{\log x} = x^{\log 3} = t, t > 0$ 則原式為 $t^2 - 4t - 45 = 0 \Rightarrow (t-9)(t+5) = 0$
 $\Rightarrow t = 9$ 或 -5 (負不合), 即 $t = 3^{\log x} = 9 \Rightarrow \log x = 2$ 因此 $x = 10^2 = 100$

2. **解析** : $x < 1, x^{2 \log x} = 1000x \Rightarrow \log(x^{2 \log x}) = \log(1000x) \Rightarrow 2 \log x \cdot \log x = 3 + \log x$
 (設 $t = \log x \Rightarrow t < 0$) $\Rightarrow 2t^2 - t - 3 = 0 \Rightarrow (t+1)(2t-3) = 0$
 $\Rightarrow t = -1, \frac{3}{2}$ (正不合) $\Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$

3. **解析** : $(\log_2 4x)(\log_2 8x) = 12$
 $\Rightarrow (\log_2 4 + \log_2 x)(\log_2 8 + \log_2 x) - 12 = 0$
 $\Rightarrow (\log_2 x)^2 + 5(\log_2 x) - 6 = 0$ 有兩根 α, β
 由根與係數關係可知 $\begin{cases} \log_2 \alpha + \log_2 \beta = -5 \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ \log_2 \alpha \cdot \log_2 \beta = -6 \end{cases}$
 由 $\textcircled{1}$, $\log_2 \alpha + \log_2 \beta = \log_2 \alpha \beta = -5$
 $\therefore \alpha \beta = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

4. **解析** : $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3(\log_5 6x)) > 0 = \log_{\frac{1}{2}} 1$
 \therefore 底數 $0 < \frac{1}{2} < 1$, 又真數需大於 0 $\therefore 0 < \log_3(\log_5 6x) < 1$
 $\log_3 1 < \log_3(\log_5 6x) < \log_3 3 \Rightarrow 1 < \log_5 6x < 3 \Rightarrow \log_5 5 < \log_5 6x < \log_5 125$
 $\Rightarrow 5 < 6x < 125 \Rightarrow \frac{5}{6} < x < \frac{125}{6}$

5. **解析** : $1 \leq x \leq 1000 \Rightarrow 0 \leq \log x \leq 3$
 $\log f(x) = (2 - \log x)(\log x) = -(\log x)^2 + 2 \log x$
 $= -[(\log x)^2 - 2 \log x + 1] + 1 = -(\log x - 1)^2 + 1$
 (1) 當 $x = 1000, \log x = 3$ 時, $\log f(x)$ 有最小值 $-3, f(x)$ 有最小值 $\frac{1}{1000}$
 (2) 當 $x = 10, \log x = 1$ 時, $\log f(x)$ 有最大值 $1, f(x)$ 有最大值 10