# 1-1~2 空間向量小考

20230211
高二龍哥數 A
姓名:__________

## 一、 多重選擇題：每題 10 分，共 10 分

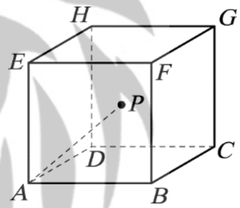
1. (　　)空間中，已知（0，0，0），（1，2，2），（−2，2，−1），（−2，−1，2）為某一個正立方體的四個頂點，請問下列各點中哪些也是正立方體的頂點？
(A)（−1，4，1）　(B)（4，1，−1）　(C)（−1，1，4）
(D)（−4，1，1）　(E)（−3，3，3）

## 二、 填充題：每題 15 分，共 90 分

1. $A(-1,2,3)$，$B(3,4,5)$，$P$ 點在 $xy$ 平面上，若 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 有最小值，求 $P$ 點坐標為【　　　　】

2. 空間坐標系中，設 $xy$ 平面為一鏡面，有一光線通過 $P(0,0,1)$ 射向 $xy$ 鏡面上的 $Q(3,4,0)$，經鏡面反射後通過 $R$。若 $\overline{QR}=3\overline{PQ}$，則 $R$ 點坐標為【　　　　】

3. 附圖是邊長為 6 的正立方體，若 $P$ 點在立方體之內部，且滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，試求 $P$ 點到直線 $AB$ 的距離為【　　　　】




4. 設 $A(1,2,2)$，$B(2,3,6)$，$O(0,0,0)$，則 $\angle AOB$ 的角平分線與 $\overline{AB}$ 相交於 $C$ 點，求 $C$ 點坐標為【　　　　】

5. 空間中有一線段 $AB$，在 $xy$ 平面、$yz$ 平面、$xz$ 平面上的正射影長分別為 $8\sqrt{2}$、$9\sqrt{2}$、$12\sqrt{2}$，則 $\overline{AB}=$【　　　　】

6. 將 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$ 的矩形 $ABCD$ 沿對角線 $\overline{AC}$ 折起，使平面 $ABC$ 與平面 $ACD$ 的二面角為 $120^\circ$，試求此時 $\overline{BD}$ 的長度為【　　　　】

**一、 多重選擇題：每題 10 分，共 10 分**

1.(A)(C)(D)(E)

**二、 填充題：每題 15 分，共 90 分**

1. (1，3，0)

2. (12，16，3)

3.5

4.$\left(\dfrac{13}{10},\dfrac{23}{10},\dfrac{16}{5}\right)$

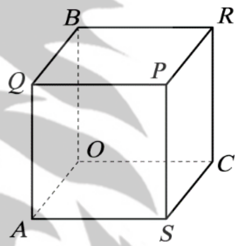
5.17

6.$\dfrac{\sqrt{481}}{5}$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - << 解 析 >> - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**一、 多重選擇題：每題 10 分，共 10 分**

1.解析：設 $O$(0，0，0)，$A$(1，2，2)，$B$(−2，2，−1)，$C$(−2，−1，2)



$\because \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ $\therefore A$、$B$、$C$ 為與 $O$ 相鄰之三頂點

如圖，設其他點為 $P$、$Q$、$R$、$S$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(-1，4，1)\Rightarrow Q(-1，4，1)$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(-4，1，1)\Rightarrow R(-4，1，1)$

$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(-1，1，4)\Rightarrow S(-1，1，4)$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(-3，3，3)$

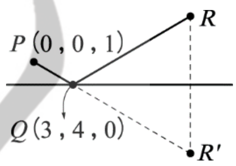
故選(A)(C)(D)(E)

**二、 填充題：每題 15 分，共 90 分**

1.解析：$\overline{AB}$ 的中點 $C\left(\dfrac{-1+3}{2},\dfrac{2+4}{2},\dfrac{3+5}{2}\right)=(1，3，4)$ 當 $P$ 為 $C$ 對 $xy$ 平面的投影點時，

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 有最小值 $\therefore P$ 點坐標為(1，3，0)

2.解析：考慮 $R'$ 為 $R$ 對 $xy$ 平面的對稱點如圖所示




則 $\overrightarrow{QR'}=3\overrightarrow{PQ}=3\cdot(3，4，-1)=(9，12，-3)\Rightarrow R'=(12，16，-3)$

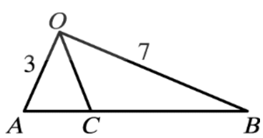
故 $R$ 點坐標為(12，16，3)

3.解析：定坐標系，令 $A$(0，0，0)，依題意得 $P$(1，3，4)

又 $A$ 點在 $x$ 軸的投影點 $A'$(1，0，0)

則 $d(P，\overline{AB})=d(P，x$ 軸$)=\sqrt{(1-1)^2+(3-0)^2+(4-0)^2}=5$

4.解析：$\overrightarrow{OA}=(1，2，2)$，$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1+4+4}=3$




$\overrightarrow{OB}=(2，3，6)$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{4+9+36}=7$

$\overline{AC}:\overline{CB}=\overline{OA}:\overline{OB}=3:7$ $\therefore C$ 坐標為 $\left(\dfrac{7+6}{3+7},\dfrac{14+9}{3+7},\dfrac{14+18}{3+7}\right)$

$=\left(\dfrac{13}{10},\dfrac{23}{10},\dfrac{16}{5}\right)$

5.解析：設 $A$(0，0，0)，$B$($a$，$b$，$c$)

$\because \overline{AB}$ 在 $xy$ 平面的正射影長為 $8\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=8\sqrt{2}$

$\Rightarrow a^2+b^2=128$ ……………①

$\overline{AB}$ 在 $yz$ 平面的正射影長為 $9\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{b^2+c^2}=9\sqrt{2}$

$\Rightarrow b^2+c^2=162$ ……………②

$\overline{AB}$ 在 $xz$ 平面的正射影長為 $12\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{a^2+c^2}=12\sqrt{2}$

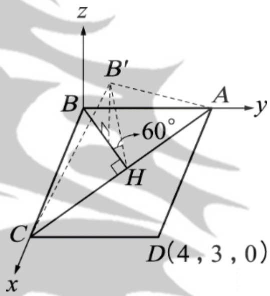
$\Rightarrow a^2+c^2=288$ ……………③

$\dfrac{①+②+③}{2}$ 得 $a^2+b^2+c^2=289$

$\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{289}=17$

故 $\overline{AB}=17$

6.解析：$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{AC}=5$




設 $H$ 為 $\overline{AC}$ 上的垂足，則 $\overline{BH}=\dfrac{3\times4}{5}=\dfrac{12}{5}$

定坐標系　令 $B$ 為原點，$\overrightarrow{BC}$ 為 $x$ 軸正向，$\overrightarrow{BA}$ 為 $y$ 軸正向

$B'$為折起後之 $B$ 點位置且為 $z$ 軸正向

則 $H\left(\dfrac{12}{5}\times\cos\angle CBH,\dfrac{12}{5}\times\sin\angle CBH,0\right)=\left(\dfrac{12}{5}\times\cos\angle BAC,\dfrac{12}{5}\times\sin\angle BAC,0\right)=\left(\dfrac{36}{25},\dfrac{48}{25},0\right)$

又 $D$（4，3，0）　$B'\left(\dfrac{12}{5}\times\cos60^\circ\times\dfrac{3}{5},\dfrac{12}{5}\times\cos60^\circ\times\dfrac{4}{5},\dfrac{12}{5}\times\sin60^\circ\right)=\left(\dfrac{18}{25},\dfrac{24}{25},\dfrac{6\sqrt{3}}{5}\right)$

則 $\overline{B'D}=\sqrt{\left(4-\dfrac{18}{25}\right)^2+\left(3-\dfrac{24}{25}\right)^2+\left(0-\dfrac{6\sqrt{3}}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{481}}{5}$