2-2 微積分小考

姓名:__________

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 20 分

1. (　　)設 $f(x)$ 為一個實係數多項式且 α，$\beta\in R$，則下列何者正確？
(A)若 $f'(\alpha)=0$，則 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 處必有極值
(B)若 $f'(\alpha)=0$ 且 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 處有極小值，則 $f''(\alpha)>0$
(C)若 $f''(x)>0$，則 $f'(x)$ 為遞增函數
(D)若 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 處有反曲點，則 $f''(\alpha)=0$
(E)若 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 有極大值，在 $x=\beta$ 有極小值，則 $f(\alpha)>f(\beta)$

二、 填充題：每題 20 分，共 80 分

1. 實係數三次函數 $f(x)=ax^3+6x^2+3(a-2)x+7$ 恆為遞減函數的條件是【　　　　】

2. 函數 $f(x)=-x^4+2x^2-1$ 在區間 $[-2,2]$ 的極大值為【　　　】與極小值為【　　　】

3. 已知函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-2$ 處有極大值，在 $x=2$ 有極小值 -14，求序組 $(a,b,c)=$【　　　　】

4. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，若 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x+1}=3$，且 $y=f(x)$ 無極值，求 a 值的範圍為【　　　　】

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 20 分

1.(C)(D)

二、 填充題：每題 20 分，共 80 分

1.$a\leqq 1-\sqrt{5}$

2.0；-9 與 -1

3.（0，-12，2）

4.$0\leqq a\leqq 6$

------------------------- << 解 析 >> -------------------------

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 20 分

1.解析：(A)╳：反例，如 $f(x)=x^3$，則 $f'(0)=0$，但 $f(0)$ 並非極值

(B)╳：反例，如 $f(x)=x^4$，則 $f'(0)=0$ 且 $f(0)$ 為極小值，但 $f''(0)=0$

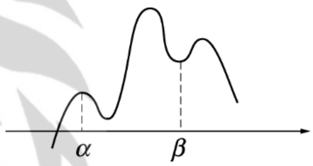
(C)○：$f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}>0$

當 $h>0$ 時，$x+h>x\Rightarrow f'(x+h)>f'(x)$

當 $h<0$ 時，$x+h<x\Rightarrow f'(x+h)<f'(x)$ 因此 $f'(x)$ 為遞增函數

(D)○：$f(x)$ 在 $x=\alpha$ 時有反曲點 $\Rightarrow f''(\alpha)=0$

(E)╳：如圖 多項式 $f(\alpha)$ 為極大值，$f(\beta)$ 為極小值但 $f(\alpha)<f(\beta)$



故選(C)(D)

二、 填充題：每題 20 分，共 80 分

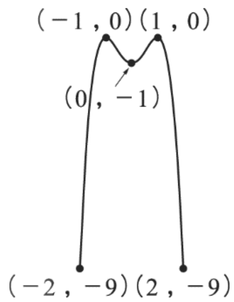
1.解析：$f(x)=ax^3+6x^2+3(a-2)x+7\Rightarrow f'(x)=3ax^2+12x+3(a-2)$

$f(x)$ 恆為遞減函數 $\Rightarrow f'(x)\leqq 0$，$\forall x\in R\Rightarrow a<0$ 且 $16-4a(a-2)\leqq 0$

$\Rightarrow a<0$ 且 $a^2-2a-4\geqq 0\Rightarrow a<0$ 且 $a\geqq 1+\sqrt{5}$ 或 $a\leqq 1-\sqrt{5}\Rightarrow a\leqq 1-\sqrt{5}$

2.解析：$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x^2-1)=-4x(x+1)(x-1)$

x	-2		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-9	↗	0	↘	-1	↗	0	↘	-9



極大值為 $f(-1)=f(1)=0$ 極小值為 $f(-2)=f(2)=-9$ 與 $f(0)=-1$

3.解析：$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$

函數 $f(x)$ 在 $x=-2$，2 處有極值 $\Rightarrow f'(x)=3(x+2)(x-2)=3x^2-12$

比較係數得 $a=0$，$b=-12$，又 $f(2)=-14\Rightarrow 8-24+c=-14\Rightarrow c=2$

故序組 $(a,b,c)=(0,-12,2)$

4.解析：$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x+1}$ 存在 $\Rightarrow (x+1)\mid f(x)\Rightarrow f(-1)=0\Rightarrow a-b+c=1$ ………①

將 $b=a+c-1$ 代入 $f(x)=x^3+ax^2+(a+c-1)x+c=(x+1)[x^2+(a-1)x+c]$

又 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x+1}=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to -1}[x^2+(a-1)x+c]=3\Rightarrow 2-a+c=3\Rightarrow c-a=1$………②

由①、②得 $c=a+1$，$b=2a\Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+2ax+(a+1)$

其中 $f(x)$ 無極值 $\Rightarrow f'(x)=0$ 無相異實根 $\Rightarrow 3x^2+2ax+2a=0$ 之判別式 $\leqq 0$

$\Rightarrow 4a^2-24a\leqq 0\Rightarrow 0\leqq a\leqq 6$