2-2 微積分小考

姓名:________

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 60 分

1. (　　)下列有關實函數 $f(x)$ 的敘述哪些正確？

(A)若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}$ 存在，則 $f(2)=0$

(B)若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

(C)若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處無定義，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在

(D)若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有極大值且 $f'(a)$ 存在，則 $f'(a)=0$

(E)若 $f''(a)=0$，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處為反曲點。

2. (　　)已知一個 n 次實係數多項式 $f(x)$ 滿足下列性質：

當 $x<0$ 時，$f'(x)<0$ 且 $f''(x)>0$；當 $0<x<1$ 時，$f'(x)<0$ 且 $f''(x)<0$；
當 $1<x<4$ 時，$f'(x)<0$ 且 $f''(x)>0$；當 $x>4$ 時，$f'(x)>0$ 且 $f''(x)>0$。
請選出正確的選項。

(A) $f'(2)>f'(3)$

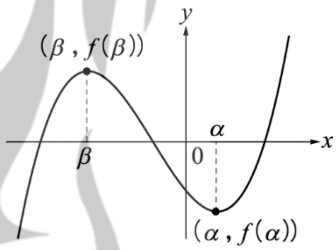
(B) $f(x)$ 在 $x=4$ 時有最小值

(C) $f(x)$ 的圖形只有一個反曲點

(D) n 可能為 3

(E) $f(x)$ 的最高次項係數必為正。

3. (　　)若三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形如圖，則下列何者正確？
（其中 $|\alpha|<|\beta|$）



(A) $a<0$

(B) $b>0$

(C) $c>0$

(D) $d<0$

(E) $b^2-3ac>0$

二、 填充題：每題 20 分，共 40 分

1. 設函數 $f(x)=x^3-ax^2+12x+7$ 有極大值與極小值，求實數 a 的範圍為【　　　　】

2. 已知三次函數 $f(x)=ax^3-3x^2+(a+2)x-7$ 沒有極值，求實數 a 的範圍為【　　　　】

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 60 分

1.(A)(B)(D)

2.(B)(E)

3.(B)(D)(E)

二、 填充題：每題 20 分，共 40 分

1.$a>6$ 或 $a<-6$

2.$a\geqq 1$ 或 $a\leqq -3$

\- << 解 析 >> -

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 60 分

1.解析：(A)○：若 $f(2)\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}$ 不存在

(B)○：$f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續　故 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

(C)╳：考慮 $f(x)=\begin{cases}x，x>0\\-x，x<0\end{cases}$，則 $f(x)$ 在 $x=0$ 無定義　但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ 存在

(D)○：$f(x)$ 在 $x=a$ 有極大值　$\therefore\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$

由 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqq 0$ 及 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqq 0$

知 $f'(a)=0$

(E)╳：考慮 $f(x)=x^4\Rightarrow f''(x)=12x^2$ 則 $f''(0)=0$，

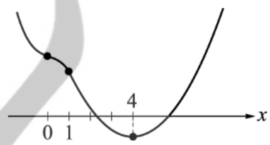
但 $x>0$ 時，$f''(x)>0$ 且 $x<0$ 時 $f''(x)>0$ 皆為凹口向上，

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 並非反曲點　　故選(A)(B)(D)

2.解析：多項式函數是連續、可微分函數

在 $x=0$，$x=1$，$x=4$ 附近求得 $f'(x)$，$f''(x)$ 的正負號，可列出下表：

x		0		1		4	
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$		$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
增減	↘		↘		↘		↗
略圖							



可得略圖如圖：

(A)╳：當 $1<x<4$ 時，$f''(x)>0$，代表在這個區間中，$f'(x)$ 為遞增函數，

故 $f'(3)>f'(2)$

(B)○：由圖形可知 $f(x)$ 在 $x=4$ 有最小值

(C)╳：在 $x=0$ 附近時，$f''(x)$ 的值由正轉負；在 $x=1$ 附近時，$f''(x)$ 的值由負轉正，

故 $(0，f(0))$ 與 $(1，f(1))$ 皆為反曲點

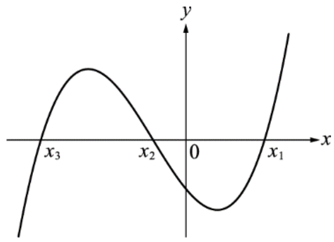
(D)╳：$f''(x)=0$ 至少有兩根 0 與 1，即 $f''(x)$ 的次數 $\geqq 2\Rightarrow f'(x)$ 的次數 $\geqq 3$

$\Rightarrow f(x)$ 的次數 $\geqq 4$

(E)○：當 $x>4$ 時，$f'(x)>0$ 且 $f''(x)>0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$

$\therefore f(x)$ 的最高次項係數必為正　　故選(B)(E)

3.解析：



設 $f(x)=0$ 的三個根為 x_1，x_2，x_3

$\Rightarrow f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，其中 $x_1>x_2>x_3$

當 $x>x_1$ 時，$f(x)>0$ $\therefore a>0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，解 $f'(x)=0$

$\therefore \alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}<0$（$\because |\alpha|<|\beta|$），可得 $b>0$

且 $\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}<0$，可得 $c<0$

又 $f(0)=d$ $\therefore d<0$

$f'(x)=0$ 有兩相異實根 α 與 β，故判別式大於 0

即 $(2b)^2-4\cdot(3a)\cdot c>0 \Rightarrow b^2-3ac>0$

(A)╳：$a>0$

(B)○：$b>0$

(C)╳：$c<0$

(D)○：$d<0$

(E)○：$b^2-3ac>0$

故選(B)(D)(E)

二、 填充題：每題 20 分，共 40 分

1.解析：$f'(x)=3x^2-2ax+12$

$\because f(x)$ 有極大值與極小值，故 $f'(x)=0$ 有兩相異實根

$\therefore D=(-2a)^2-4\times3\times12>0 \Rightarrow a^2>36$

$\Rightarrow a>6$ 或 $a<-6$

2.解析：$f'(x)=3ax^2-6x+(a+2)$ 無兩相異實根

$\Rightarrow D=36-4\times3a\times(a+2)\leqq0$

$\Rightarrow 3-a^2-2a\leqq0$

$\Rightarrow a^2+2a-3\geqq0$

$\Rightarrow (a-1)(a+3)\geqq0$

$\Rightarrow a\geqq1$ 或 $a\leqq-3$