達人 高中教育の專門家

2-2 微積分小考

20221105&1108
高三龍哥數甲
姓名:__________

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 60 分

1. (　　)設 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$（$x\in R$），且 a，b，$c\in R$。
若 $f'(x)=-3(x-\alpha)(x-\beta)$，其中 $\alpha<\beta$，下列哪些選項正確？
(A)若 $f(\alpha)=0$，則方程式 $f(x)=0$ 有兩重根
(B)$f(\alpha)>f(\beta)$
(C)若方程式 $f(x)=0$ 恰有一實根，則 $f(\alpha)f(\beta)>0$
(D)若 $\alpha<0<\beta$，且 $f(\alpha)f(\beta)<0$，則方程式 $f(x)=0$ 至少有一正根且至少有一負根
(E)若 γ 是方程式 $f''(x)=0$ 的根，則 α，γ，β 成一等差數列。

2. (　　)設 $f'(x)$ 表示實係數多項式函數 $f(x)$ 的導函數，已知 $y=f'(x)$ 的圖形是一個通過點（1，0）和點（2，0）且開口向上的拋物線。試問下列哪些選項是正確的？
(A)$f(x)$ 一定是三次多項式
(B)$f(x)$ 在 $1<x<2$ 的範圍內必為遞增
(C)$f(x)$ 一定恰有兩個極值
(D)$f(x)=0$ 一定有三個實根
(E)$f(x)=0$ 在 $1\leqq x\leqq 2$ 的範圍內一定有實根

3. (　　)設 $f(x)$ 為實係數三次多項式函數。已知五個方程式的相異實根個數如圖表所述，則下列哪些選項是正確的？
(A)$f(x)$ 之極大值為 10
(B)$y=f(x)$ 的圖形的兩條水平切線距離為 20
(C)$f(x)-103=0$ 可能有三個實根
(D)方程式 $f(x)=0$ 有三相異實根
(E)反曲點在 x 軸上。

方程式	相異實根的個數
$f(x)-20=0$	1
$f(x)-10=0$	2
$f(x)-5=0$	3
$f(x)+10=0$	2
$f(x)+20=0$	1

二、 填充題：每題 20 分，共 40 分

1. $x^3-3x^2-a=0$ 有兩個相異正根、一個負根，試求實數 a 之範圍為【　　　　】

2. 試求拋物線 $y=x^2$ 上的點與圓 $(x-3)^2+y^2=1$ 上的點距離之最小值為【　　　　】

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 60 分

1.(A)(C)(D)(E)

2.(A)(C)

3.(A)(B)(D)(E)

二、 填充題：每題 20 分，共 40 分

1.$-4<a<0$

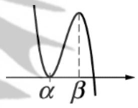
2.$\sqrt{5}-1$

\- << 解 析 >> -

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 60 分

1.解析：$f'(x)=-3x^2+2ax+b=-3(x-\alpha)(x-\beta)$ $\Rightarrow \alpha+\beta=\dfrac{2a}{3}$，$\alpha\beta=-\dfrac{b}{3}$

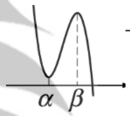
(A)○：已知 $f'(\alpha)=0$，若 $f(\alpha)=0$ 則 α 為 $f(x)=0$ 之兩重根

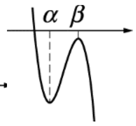


(B)╳：$y=f(x)$ 圖形右端下降，因此 $f(\alpha)<f(\beta)$

(C)○：若 $f(x)=0$ 恰有一實根，則 $y=f(x)$ 與 x 軸恰一交點

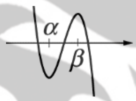
因此 $f(\beta)>f(\alpha)>0$ 或 $f(\alpha)<f(\beta)<0\Rightarrow f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$





(D)○：由 $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ 知 $f(\alpha)<0<f(\beta)$

由勘根定理知 $(-\infty,\alpha)$，(β,∞) 皆各有一實根



又 $\alpha<0<\beta$，因此 $f(x)=0$ 至少有一負根且至少有一正根

(E)○：$f''(\gamma)=-6\gamma+2a=0\Rightarrow\gamma=\dfrac{a}{3}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 因此 α，γ，β 成一等差數列

故選(A)(C)(D)(E)

2.解析：(A)○：$y=f'(x)$ 的圖形是一個通過 $(1,0)$ 和 $(2,0)$ 且開口向上的拋物線

故 $f'(x)$ 為一個二次函數，因此 $f(x)$ 是一個三次多項式

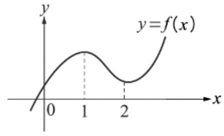
(B)╳：$f'(x)=a(x-1)(x-2)$，其中 $a>0$ ∴當 $x>2$ 或 $x<1$ 時，$f'(x)>0$；

而 $1<x<2$ 時，$f'(x)<0$ 故 $f(x)$ 在 $1<x<2$ 時為遞減函數

(C)○：解 $f'(x)=0$，可得 $x=1$ 或 $x=2$，此皆為臨界數，

觀察 $x=1$ 與 $x=2$ 附近 $f'(x)$ 值的正負號，可列表如下：

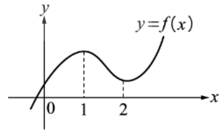
x		1		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
		極大值		極小值	



∴$f(x)$ 在 $x=1$ 與 $x=2$ 為極值發生之處

(D)╳：可繪出 $y=f(x)$ 的略圖如圖 故 $f(x)=0$ 可能只有一實根

(E)╳：若 $f(2)>0$，則 $f(x)=0$ 在 $1\leqq x\leqq 2$ 的範圍內沒有實根 如圖所示

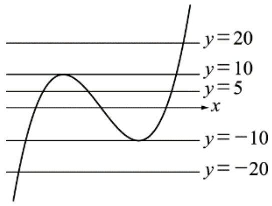


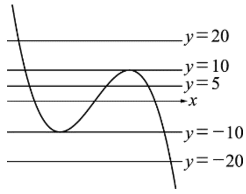
故選(A)(C)

3.解析：圖形可能如圖

(A)○：由圖可知 $f(x)$ 的極大值為 10

(B)○：由圖可知兩條水平切線距離為 $10-(-10)=20$





(C)╳：$f(x)=103 \Rightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=103 \end{cases}$ ∴恰有一交點（恰有一實根）

(D)○：由圖可知 $f(x)=0$ 有三相異實根

(E)○：因為 $f(x)$ 的兩極值為 10 或 -10，又反曲點為 $y=f(x)$ 圖形的對稱中心，

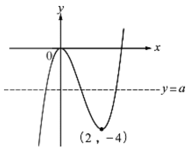
所以反曲點在 x 軸上

故選(A)(B)(D)(E)

二、 填充題：每題 20 分，共 40 分

1.解析：$\begin{cases} y=x^3-3x^2 \\ y=a \end{cases} \Rightarrow y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

x		0		2	
y'	+	0	−	0	+
y	↗	0	↘	−4	↗



所得圖形如圖

因為有兩正根一負根，所以水平直線 $y=a$ 須在 x 軸下方，相交於三點，故 $-4<a<0$

2.解析：設 $A(3,0)$ 為 $(x-3)^2+y^2=1$ 之圓心

$P(t,t^2)$ 為拋物線 $y=x^2$ 上一點

$\overline{AP}=\sqrt{(3-t)^2+(-t^2)^2}=\sqrt{t^4+t^2-6t+9}$

設 $f(t)=t^4+t^2-6t+9$

$\Rightarrow f'(t)=4t^3+2t-6=2(t-1)(2t^2+2t+3)$

由 $f'(t)=0 \Rightarrow t=1$

t		1	
$f'(t)$	−	0	+
$f(t)$	↘	5	↗

∵ $\overline{AP}$ 之最小值為 $\sqrt{f(1)}=\sqrt{5}$

∴所求為 $\sqrt{5}-1$