達人 高中教育の專門家

2-2~3 微積分小考

20221112&1115
高三龍哥數甲
姓名:________

一、填充題：每題 20 分，共 100 分

1. 假設某地區蚊子的數量（以千為單位）與降雨量 x（以吋為單位）的關係為函數
$f(x)=-x^3+15x^2-48x+60$，$0\leqq x\leqq 10$，
則造成蚊子最少時的降雨量為【　　　　】；造成蚊子最多時的降雨量為【　　　　】

2. 一張矩形鐵片，長 8 公分，寬 5 公分，四個角各截去一個大小相等的正方形，
再將四邊摺起，做成一個無蓋的長方體容器，則當截去正方形邊長為【　　　　】公分時，
容器的容積最大，此時容器的容積最大為【　　　　】立方公分

3. 設拋物線 $y=9-x^2$ 與 x 軸的交點為 A，B，今有一梯形以 $\overline{AB}$ 為下底，上底在 x 軸上方，
求此梯形最大面積為【　　　　】

4. 設函數 $f(x)=x^3+x$ 之圖形與直線 $y=0$，$x=0$，$x=2$ 所圍成的區域為 T，
將區間 $[0,2]$ 等分成 n 個寬度為 $\frac{2}{n}$ 的區間，得區域 T 面積之上和為 $A+\frac{B}{n}+\frac{C}{n^2}$，
則序組 $(A,B,C)=$【　　　　】

5. 設由 $f(x)=x^3$ 的圖形與直線 $x=1$，$x=3$ 及 x 軸圍成一個區域 R。
今將 R 分成 n 個等寬的長條，令其上和為 U_n，下和為 L_n，區域 R 的面積為 S，
若 $U_n-L_n<\frac{1}{100}$，則 n 之最小正整數值為【　　　　】

2-2~3 微積分小考

20221112&1115
高三龍哥數甲
姓名:__________

一、 填充題：每題 20 分，共 100 分

1.2；8

2.1；18

3.32

4.（6，10，4）

5.(1) 5201；(2) 20

- << 解 析 >> -

1.解析：$f(x)=-x^3+15x^2-48x+60$，$0\leqq x\leqq 10$

$\Rightarrow f'(x)=-3x^2+30x-48=-3(x-2)(x-8)=0\Rightarrow x=2$，8

所以 $x=2$ 時 $f(x)$ 有最小值　$x=8$ 時 $f(x)$ 有最大值

x	0		2		8		10
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	60	↘	16	↗	124	↘	80

2.解析：設截去正方形的邊長為 x 公分，則摺起來的容器的長為 $(8-2x)$ 公分，寬為 $(5-2x)$ 公分，

而高為 x 公分　令容器容積為 $f(x)=x(8-2x)(5-2x)$

$=4x^3-26x^2+40x$，$0<x<\dfrac{5}{2}$

則 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=12x^2-52x+40=4(x-1)(3x-10)$

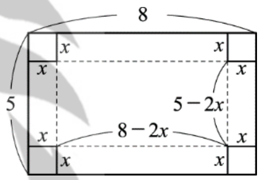
令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，$\dfrac{10}{3}$（不合）

$f(x)$ 的極值只可能出現在 $x=1$ $\Rightarrow$ 故 $f(x)$ 有最大值為 $f(1)=18$

此即當 $x=1$ 公分時，容器的最大容積為 18 立方公分

x	0		1		$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		+		−	
增減		↗		↘	

↑
極大值



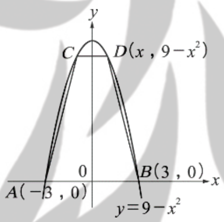
3.解析：設 $D(x，9-x^2)$，$0<x<3\Rightarrow \overline{CD}=2x$

由 $\overline{AB}=6$ 得梯形 $ABCD$ 面積

$S=\dfrac{6+2x}{2}(9-x^2)=-(x+3)(x^2-9)=-x^3-3x^2+9x+27$

$\Rightarrow S'=-3x^2-6x+9=-3(x-1)(x+3)$，$0<x<3$

所以當 $x=1$ 時得梯形 $ABCD$ 面積之最大值為 32



x	0		1		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	27	↗	32	↘	0

4.解析：將 $[0，2]$ 分成 n 個寬度皆為 $\dfrac{2}{n}$ 之區間，

因 $f(x)=x^3+x$ 為遞增函數，

故上和為 $\dfrac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\dfrac{2j}{n}\right)^3+\left(\dfrac{2j}{n}\right)\right]=\dfrac{16}{n^4}\sum_{j=1}^{n}j^3+\dfrac{4}{n^2}\sum_{j=1}^{n}j=\dfrac{16}{n^4}\cdot\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}+\dfrac{4}{n^2}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{4n^2+8n+4}{n^2}+\dfrac{2n+2}{n}=6+\dfrac{10}{n}+\dfrac{4}{n^2}$

∴序組 $(A，B，C)=(6，10，4)$

5.解析：上和 $U_n=\dfrac{3-1}{n}\left[\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^3+\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^3+\cdots\cdots+\left(1+\dfrac{2n}{n}\right)^3\right]$

下和 $L_n=\dfrac{3-1}{n}\left[1^3+\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^3+\cdots\cdots+\left(1+\dfrac{2n-2}{n}\right)^3\right]$

$\Rightarrow U_n-L_n=\dfrac{2}{n}\left[\left(1+\dfrac{2n}{n}\right)^3-1^3\right]=\dfrac{52}{n}<\dfrac{1}{100}$　$\Rightarrow n>5200$　∴$n\geqq 5201$，最小值為 5201