2-3 微積分小考

一、 填充題：每題 20 分，共 100 分

1. 把三次函數 $y=x^3+1$ 在 $0\leqq x\leqq 1$ 範圍內圖形下的區域分成寬度為 $\frac{1}{n}$ 的長條形區域，面積上和為 U_n，下和為 L_n，若 $U_n-L_n<0.001$，則滿足此條件 n 的最小值為【　　　　】

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\left(1+\frac{2}{n}\right)^3+\cdots\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^3\right]=$【　　　　】

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{j}{n}\right)^3+5\left(\frac{j}{n}\right)\right]\times\frac{1}{n}=$【　　　　】

4. $\int_1^2(3x+1)^2\,dx=$【　　　　】

5. 設 $f(x)=\int_2^x(12-x^3)\,dx$，試求 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=$【　　　　】

一、 填充題：每題 20 分，共 100 分

1.1001

2.$\frac{15}{4}$

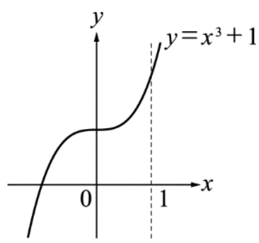
3.$\frac{11}{4}$

4.31

5.4

\- << 解 析 >> -

1.解析：上和 $U_n=\frac{1}{n}\left\{\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+1\right]+\left[\left(\frac{2}{n}\right)^3+1\right]+\cdots\cdots+\left[\left(\frac{n}{n}\right)^3+1\right]\right\}$



下和 $L_n=\frac{1}{n}\left\{\left[\left(\frac{0}{n}\right)^3+1\right]+\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+1\right]+\cdots\cdots+\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^3+1\right]\right\}$

$U_n-L_n=\frac{1}{n}<0.001 \quad \Rightarrow 1000<n$

故 n 之最小值為 1001

2.解析：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\left(1+\frac{2}{n}\right)^3+\cdots\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^3\right]=\int_0^1(1+x)^3dx=\frac{1}{4}(1+x)^4\Big|_0^1=\frac{15}{4}$

3.解析：$\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{j}{n}\right)^3+5\left(\frac{j}{n}\right)\right]\times\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{n}\left\{\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+5\left(\frac{1}{n}\right)\right]+\left[\left(\frac{2}{n}\right)^3+5\left(\frac{2}{n}\right)\right]+\cdots\cdots+\left[\left(\frac{n}{n}\right)^3+5\left(\frac{n}{n}\right)\right]\right\}$

考慮 $f(x)=x^3+5x$

則 $\frac{1}{n}\left\{\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+5\left(\frac{1}{n}\right)\right]+\left[\left(\frac{2}{n}\right)^3+5\left(\frac{2}{n}\right)\right]+\cdots\cdots+\left[\left(\frac{n}{n}\right)^3+5\left(\frac{n}{n}\right)\right]\right\}$

表 $f(x)$ 對於區間 $[0，1]$ 之上和

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{j}{n}\right)^3+5\left(\frac{j}{n}\right)\right]\frac{1}{n}=\int_0^1(x^3+5x)dx=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{2}x^2\right)\Big|_0^1$

$=\frac{1}{4}+\frac{5}{2}=\frac{11}{4}$

4.解析：$\int_1^2(3x+1)^2dx=\int_1^2(9x^2+6x+1)\,dx=(3x^3+3x^2+x)\Big|_1^2=(24+12+2)-(3+3+1)=31$

5.解析：$f(x)=\int_2^x(12-x^3)\,dx\Rightarrow f(2)=\int_2^2(12-x^3)\,dx=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=12-2^3=4$