2-3 微積分小考

20221126&1129
高三龍哥數甲
姓名:__________

一、 填充題：每題 20 分，共 100 分

1. 設 $f(x)$ 為一個多項式函數，且滿足 $\int_a^x f(t)\,dt=\frac{1}{4}x^2-x$，求：
   (1) $f(x)$ =【　　　】
   (2) a 之值為【　　　】

2. 設 $f(x)$ 是一個多項式函數，且 $f(x)=3x^2+6x\int_0^1 f(x)\,dx+1$，試求 $f(3)$ =【　　　】

3. 曲線 $y=f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 與 x 軸所圍成的封閉區域，求此區域之面積為【　　　】

4. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為實係數三次多項式，
   已知點 $A(0,5)$ 為函數 $y=f(x)$ 的圖形之反曲點，且此圖形在 A 點的切線為 $12x+y=5$，
   (1)試求序組 (b,c,d) =【　　　】
   (2)若 $a>0$ 且 $y=f(x)$ 的圖形與三直線 $x=0$，$x=-2$，$y=0$ 所圍的有界區域面積為 30，
   試求 a=【　　　】

5. 設 $a>0$，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為實係數三次多項式。
   若 $y=f(x)$ 的圖形滿足以下三條件：
   (1)原點 $(0,0)$ 為 $y=f(x)$ 的圖形之反曲點
   (2) $y=f(x)$ 的圖形在原點的切線為 $y=-x$
   (3) $y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=0$ 所圍的有界區域面積為 4
   則 a 值為【　　　】

一、 填充題：每題 20 分，共 100 分

1.(1) $\frac{1}{2}x-1$；(2) 0 或 4

2.10

3.$\frac{1}{2}$

4.(1)(0，−12，5)；(2) 1

5.$\frac{1}{8}$

\- << 解 析 >> -

1.解析：(1)設 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt=\frac{1}{4}x^2-x$ 由微積分基本定理第一式可知 $F'(x)=f(x)$

$\Rightarrow f(x)=F'(x)=\frac{1}{2}x-1$

(2)將 x 以 a 代入，則 $\int_a^a f(t)\,dt=\frac{1}{4}a^2-a$ 而 $\int_a^a f(t)\,dt=0\Rightarrow \frac{1}{4}a^2-a=0\Rightarrow a=0$ 或 4

2.解析：設 $\int_0^1 f(x)\,dx=k$，$k\in R\Rightarrow f(x)=3x^2+6x\cdot k+1$

$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(3x^2+6kx+1)dx=(x^3+3kx^2+x)\Big|_0^1=3k+2$

又 $\int_0^1 f(x)dx=k\therefore 3k+2=k\Rightarrow k=-1\Rightarrow f(x)=3x^2-6x+1$ 故 $f(3)=3\cdot 3^2-6\cdot 3+1=10$

3.解析：$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

所求面積為 $\int_1^3|x^3-6x^2+11x-6|\,dx=\int_1^2(x^3-6x^2+11x-6)\,dx+\int_2^3(-x^3+6x^2-11x+6)\,dx$

$=\left(\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x\right)\Big|_1^2+\left(-\frac{1}{4}x^4+2x^3-\frac{11}{2}x^2+6x\right)\Big|_2^3=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

4.解析：(1) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$ $f''(0)=0\Rightarrow 2b=0\Rightarrow b=0$

$f(0)=5\Rightarrow d=5$ $f'(0)=-12\Rightarrow c=-12$ $\therefore$序組 $(b，c，d)=(0，-12，5)$

(2)所求為 $\int_{-2}^0 f(x)\,dx=\int_{-2}^0(ax^3-12x+5)\,dx=\left(\frac{a}{4}x^4-6x^2+5x\right)\Big|_{-2}^0=30$

$\Rightarrow-\left(\frac{a}{4}\cdot16-24-10\right)=-4a+34=30\therefore a=1$

5.解析：$f'(x)=3ax^2+2bx+c\Rightarrow f''(x)=6ax+2b$ 因為 $(0，0)$ 為反曲點，所以 $\begin{cases}f(0)=0\\f''(0)=0\end{cases}$

$\Rightarrow b=d=0$ 在原點的切線斜率為 -1，所以可得 $f'(0)=-1\Rightarrow c=-1$

$\Rightarrow f(x)=ax^3-x$ 又 $f(x)=ax^3-x=x(ax^2-1)=0$

所以可得 $y=f(x)$ 與 x 軸交於三點 $\left(\frac{-1}{\sqrt{a}},0\right)$，$(0，0)$，$\left(\frac{1}{\sqrt{a}},0\right)$

$\Rightarrow 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(-ax^3+x)\,dx=4\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(-ax^3+x)\,dx=\left(-\frac{a}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{1}{4a}=2\therefore a=\frac{1}{8}$