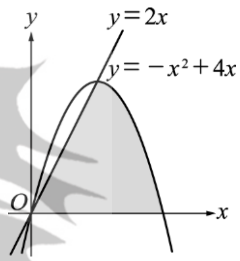
2-4 微積分小考

姓名:________

一、 填充題：每題 20 分，共 100 分

1. 求兩曲線 $y=x^3+x^2-6x-6$ 與 $y=x^2+x$ 間所圍成的區域面積為【　　　　】

2. 如圖，陰影部分為拋物線 $y=-x^2+4x$ 與直線 $y=2x$ 及 x 軸所圍成的區域，求此區域之面積為【　　　　】



3. 曲線 $y-x=6$，$y-x^3=0$ 及 $2y+x=0$ 所圍成區域的面積為【　　　　】。

4. 在坐標平面上的第一象限內，試求 $y=\sqrt{x+3}$ 與 x 軸及 $y=x-3$ 所圍之區域面積為【　　　　】

5. 自點 $A(3,-4)$ 可對拋物線 $y=x^2-3x$ 做出兩條切線，其切點分別為 $P(1,-2)$ 和 Q，求：
（1）Q 點的坐標為【　　　　】
（2）由此兩切線與拋物線所圍成的區域面積為【　　　　】

一、 填充題：每題 20 分，共 100 分

1. $\frac{131}{4}$

2. $\frac{28}{3}$

3. 22

4. $\frac{27}{2}-2\sqrt{3}$

5. (1)(5，10)；(2) $\frac{16}{3}$

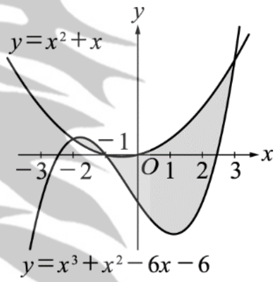
- << 解 析 >> -

1. 解析：$\begin{cases} y=x^3+x^2-6x-6 \\ y=x^2+x \end{cases} \Rightarrow x^3+x^2-6x-6=x^2+x$

$\Rightarrow x^3-7x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)(x+1)=0 \Rightarrow x=-1，-2，3$

略圖如圖　　　由 $y=x^3+x^2-6x-6 \Rightarrow y'=3x^2+2x-6$

x	-2	-1	3
y'	$+$	$-$	$+$
y	↗	↘	↗



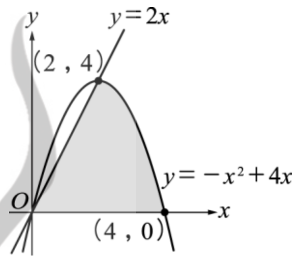
$\therefore$ 所求為 $\int_{-2}^{-1}[(x^3+x^2-6x-6)-(x^2+x)]dx+\int_{-1}^{3}[(x^2+x)-(x^3+x^2-6x-6)]\,dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^3-7x-6)\,dx+\int_{-1}^{3}(-x^3+7x+6)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{7}{2}x^2-6x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{7}{2}x^2+6x\right)\Big|_{-1}^{3}$

$=\frac{3}{4}+32=\frac{131}{4}$

2. 解析：$\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow 2x=-x^2+4x \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x=0$ 或 2

$\int_0^2 2x\,dx+\int_2^4(-x^2+4x)\,dx=x^2\Big|_0^2+\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_2^4=4+\frac{16}{3}=\frac{28}{3}$



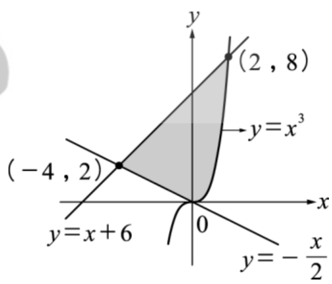
3. 解析：如圖所示，$y=x+6$ 及 $y=x^3$ 的交點為 $(2，8)$

$y=x+6$ 及 $2y+x=0$ 的交點為 $(-4，2)$

$y=x^3$ 與 $2y+x=0$ 的交點為 $(0，0)$

$\therefore x\in[-4，0]$ 時，$x+6\geqq-\frac{x}{2}$

$x\in[0，2]$ 時，$x+6\geqq x^3$

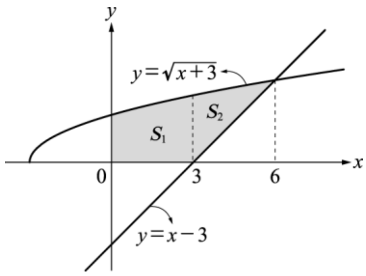


故面積為 $\int_{-4}^{0}\left[x+6-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]dx+\int_0^2[(x+6)-x^3]\,dx$

$=\left(\frac{x^2}{2}+6x+\frac{x^2}{4}\right)\Big|_{-4}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2$

$=[0-(-12)]+(10-0)=22$

4.解析：所圍的區域如圖，可分成兩部分：



① 在 $0\leqq x\leqq 3$ 範圍內為 $y=\sqrt{x+3}$ 與 x 軸所夾的區域為 S_1

② 在 $3\leqq x\leqq 6$ 範圍內為 $y=\sqrt{x+3}$ 與 $y=x-3$ 所夾的區域為 S_2

故所求面積為 S_1+S_2，即

$$\int_0^3\sqrt{x+3}\,dx+\int_3^6[\sqrt{x+3}-(x-3)]\,dx$$

$$=\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3+\left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+3x\right]\Big|_3^6$$

$$=\frac{2}{3}(6^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}})+\left(\frac{2}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}}-18+18\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 6^{\frac{3}{2}}-\frac{9}{2}+9\right)$$

$$=-2\sqrt{3}+18-18+18+\frac{9}{2}-9=\frac{27}{2}-2\sqrt{3}$$

5.解析：(1)設 $Q(a, a^2-3a)$

由 $y'=2x-3$ 知在 Q 點之切線斜率為 $2a-3$

$\therefore \overleftrightarrow{QA}$：$y-(a^2-3a)=(2a-3)(x-a)$

將 $A(3, -4)$ 代入 $\overleftrightarrow{QA}$ 方程式

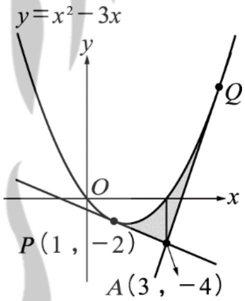
$\Rightarrow -4-(a^2-3a)=(2a-3)(3-a)$

$\Rightarrow a^2-6a+5=0\Rightarrow a=5$ 或 1（1 不合）

$\therefore Q(5, 10)$

(2) $\overleftrightarrow{AP}$：$y+2=(2\times1-3)(x-1)\Rightarrow y=-x-1$

$\overleftrightarrow{QA}$：$y-10=(2\times5-3)(x-5)\Rightarrow y=7x-25$



$$\therefore \int_1^3[(x^2-3x)-(-x-1)]\,dx+\int_3^5[(x^2-3x)-(7x-25)]\,dx$$

$$=\int_1^3(x^2-2x+1)\,dx+\int_3^5(x^2-10x+25)\,dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\Big|_1^3+\left(\frac{x^3}{3}-5x^2+25x\right)\Big|_3^5$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$