2-4 微積分小考

姓名:__________

一、 多重選擇題：每題 25 分，共 50 分

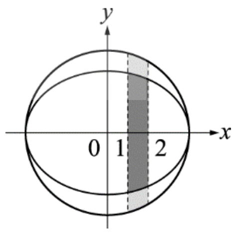
1. (　　)設兩個二次曲線 Γ_1：$y=\frac{1}{2}x^2+3ax+b$ 與 Γ_2：$y=-x^2+ax+3b$ 在 $x=1$ 處有公切線 L：$y=cx+d$，其中 a，b，c，d 為實數。若曲線 Γ_1，直線 L 與 y 軸所圍成區域面積記為 A；曲線 Γ_2，直線 L 與 y 軸所圍成區域面積記為 B，則下列何者正確？
(A) $a=-\frac{1}{2}$　(B) $b=-\frac{3}{4}$　(C) $c=-\frac{7}{2}$　(D) $d=-\frac{5}{2}$　(E) $\frac{A}{B}=\frac{1}{2}$。

2. (　　)下列敘述何者正確？
(A)設 $y=f(x)$ 在 $[a，b]$ 區間內連續，則 $y=f(x)$ 在 $[a，b]$ 區間內與 x 軸所圍成的區域面積可表成 $\int_a^b |f(x)|\,dx$
(B)設 $y=f(x)$ 為三次多項式函數且與 x 軸有三個相異的交點分別為 $(\alpha，0)$，$(\beta，0)$，$(\gamma，0)$，則 $y=f(x)$ 反曲點的 x 坐標為 α，β，γ 的算術平均數
(C)設 $y=f(x)$ 為多項式函數，滿足 $f'(a)=0$ 且 $f''(a)=0$，則 $f(a)$ 不會是 $y=f(x)$ 的相對極值
(D)四次的多項式函數的反曲點可能只有一個
(E)設有一正角錐臺其上底、下底分別為邊長 a、b 的正方形，高為 h，側面為四個全等的等腰梯形，則該錐臺的體積為 $\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h$。

二、 填充題：每題 25 分，共 50 分

1. 拋物線 $y=x^2$ 與過其上一點 $(2，4)$ 之切線及 y 軸所圍區域之面積為【　　　　】

2. 如圖，圓 $x^2+y^2=16$ 內含一橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，設圓內部在兩直線 $x=1$，$x=2$ 之間的面積為 C，而橢圓內部在此兩直線之間的面積為 E，則 $\frac{C}{E}$ 等於【　　　　】



一、 多重選擇題：每題 25 分，共 50 分

1.(B)(C)(E)

2.(A)(B)(E)

二、 填充題：每題 25 分，共 50 分

1.$\frac{8}{3}$

2.$\frac{4}{3}$

-------------------------- << 解 析 >> --------------------------

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 40 分

1.解析：設二次曲線 Γ_1：$y=f(x)=\frac{1}{2}x^2+3ax+b$　Γ_2：$y=g(x)=-x^2+ax+3b$

顯然 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均是可微分函數，故 $f'(x)=x+3a$　$g'(x)=-2x+a$

(1)已知 Γ_1 與 Γ_2 在 $x=1$ 處有公切線，故可得 $f(1)=g(1)$ 及 $f'(1)=g'(1)$

即 $\begin{cases}\frac{1}{2}+3a+b=-1+a+3b\\ 1+3a=-2+a\end{cases}$ 解之，得 $a=-\frac{3}{2}$，$b=-\frac{3}{4}$

(2)其次，L 切線方程式為 $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

而 $f'(1)=-\frac{7}{2}$，$f(1)=-\frac{19}{4}$，故 L 方程式為 $y=-\frac{7}{2}x-\frac{5}{4}$　$\therefore c=-\frac{7}{2}$，$d=-\frac{5}{4}$

(3)因 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{2}x-\frac{3}{4}$，$g(x)=-x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$，$L$：$y=-\frac{7}{2}x-\frac{5}{4}$

$$\therefore A=\int_0^1\left|f(x)-\left(-\frac{7}{2}x-\frac{5}{4}\right)\right|dx=\int_0^1\frac{1}{2}(x-1)^2\,dx$$

$$B=\int_0^1\left|g(x)-\left(-\frac{7}{2}x-\frac{5}{4}\right)\right|dx=\int_0^1(x-1)^2\,dx$$

$$故\ \frac{A}{B}=\frac{\int_0^1\frac{1}{2}(x-1)^2dx}{\int_0^1(x-1)^2dx}=\frac{\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)^2dx}{\int_0^1(x-1)^2dx}=\frac{1}{2}$$

故選(B)(C)(E)

2.解析：(A)○：$\because |f(x)|\geq 0$

(B)○：設 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-a\alpha\beta\gamma$

$\Rightarrow f'(x)=3ax^2-2a(\alpha+\beta+\gamma)x+a(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$

$\Rightarrow f''(x)=6ax-2a(\alpha+\beta+\gamma)=0\Rightarrow x=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

$\therefore$反曲點的 x 坐標為 α，β，γ 的算術平均數

(C)╳：反例：$f(x)=x^4\Rightarrow f'(x)=4x^3$，$f''(x)=12x^2$

$f'(0)=f''(0)=0$，但 $f(0)$ 為 $y=f(x)$ 的極小值

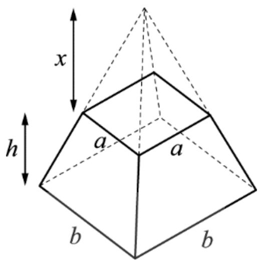
(D)╳：設 $\deg f(x)=4\Rightarrow \deg f''(x)=2$

設 $f''(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$

① 若 $\alpha<\beta$，則可知（α，$f(\alpha)$），（β，$f(\beta)$）皆為反曲點

② 若 $\alpha=\beta$，則 $f''(x)=a(x-\alpha)^2$，所以無反曲點

所以四次的多項式函數的反曲點不可能只有一個



(E)○：如圖，$\dfrac{x}{x+h}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow x=\dfrac{ah}{b-a}$

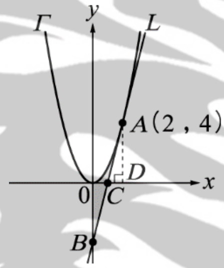
錐臺體積為 $\dfrac{1}{3}\left[b^2\times(x+h)-a^2\times x\right]$

$=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{h(b^3-a^3)}{b-a}\right]=\dfrac{h(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)}=\dfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h$

故選(A)(B)(E)

二、 填充題：每題 20 分，共 60 分

1.解析：設拋物線 Γ：$y=x^2$，$A(2，4)$



設 $f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x\Rightarrow f'(2)=4$

即過 A 之切線 L 斜率為 4

$\Rightarrow L$：$y-4=4(x-2)$

$\Rightarrow L$：$y=4x-4$

設 L 與 y 軸交於 B，與 x 軸交於 C，A 在 x 軸之投影點為 D

$\Rightarrow B(0，-4)$，$C(1，0)$，$D(2，0)$

設原點為 O

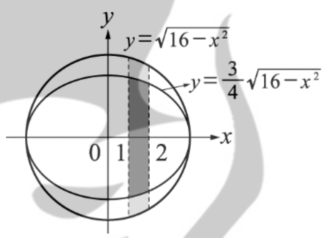
所求面積為 $\int_0^2 f(x)\,dx-\triangle ADC$ 面積 $+\triangle OBC$ 面積

$=\int_0^2 x^2dx-\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot4+\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot1=\dfrac{1}{3}x^3\Big|_0^2=\dfrac{8}{3}$

3.解析：$x^2+y^2=16\Rightarrow y=\pm\sqrt{16-x^2}$

$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\Rightarrow y=\pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$

如圖所示



$$\frac{C}{E}=\frac{2\int_1^2\sqrt{16-x^2}\,dx}{2\int_1^2\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx}=\frac{4}{3}$$