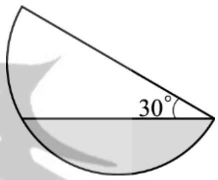
2-4 微積分小考

20221217&20
高三龍哥數甲
姓名:________

一、 填充題：每題 20 分，共 100 分

1. 有一半徑為 6 公分的實心木球浮在水面上，已知木球最高點距離水面為 3 公分，則此木球在水面上方的體積為【　　　　】立方公分

2. 在直徑為 12 的半球形容器內裝滿水，然後慢慢傾斜此容器 30°，如圖所示，則流出的水量為【　　　　】



3. 設函數 $f(x)$ 為一個多項式函數，且滿足 $\int_{2}^{x} f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-4x+a$，求
(1) $a=$【　　　　】
(2) 由 $y=f(x)$ 與 x 軸所圍的區域繞 x 軸旋轉所得之立體體積為【　　　　】

4. 自點 $(-1，0)$ 向拋物線 $y^2=x$ 作兩切線。
這兩切線與拋物線所包圍部分繞 x 軸旋轉產生一立體，這立體的體積為【　　　　】

5. 圓 $x^2+(y-2)^2=1$ 繞 x 軸旋轉所得旋轉體的體積為【　　　　】

一、 填充題：每題 20 分，共 100 分

1.45 π

2.99 π

3.（1）$\dfrac{16}{3}$；（2）$\dfrac{512}{15}\pi$

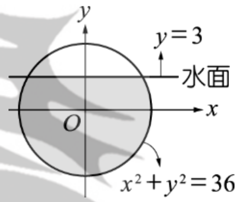
4.$\dfrac{\pi}{6}$

5.4 π^2

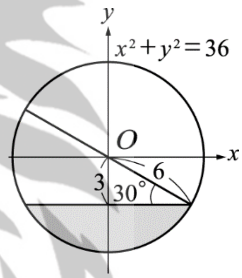
- << 解 析 >> -

1.解析：如圖所示，所求為

$$\int_3^6 \pi\left(\sqrt{36-y^2}\right)^2 dy=\pi\int_3^6 (36-y^2)\,dy=\pi\times\left(36y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_3^6=\pi\times 45=45\pi$$



2.解析：如圖為 $x^2+y^2=6^2 \Rightarrow x=\sqrt{36-y^2}$



所求為 $\displaystyle\int_{-3}^{0}\pi\times\left(\sqrt{36-y^2}\right)^2 dy=\int_{-3}^{0}\pi\times(36-y^2)\,dy=\pi\times\left(36y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{0}=99\pi$

3.解析：（1）$\displaystyle\int_2^2 f(t)\,dt=\frac{8}{3}-8+a=0\Rightarrow a=\frac{16}{3}$

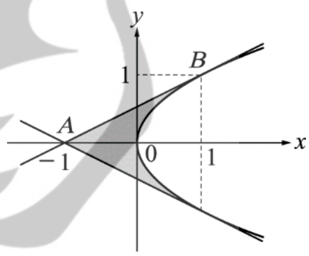
（2）$\displaystyle\int_2^x f(t)\,dt=\frac{1}{3}x^3-4x+\frac{16}{3}$　兩邊微分 $\Rightarrow f(x)=x^2-4$　令 $f(x)=0\Rightarrow x=-2，2$

體積為 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\pi y^2 dx=\pi\int_{-2}^{2}(x^4-8x^2+16)\,dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{8x^3}{3}+16x\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{512}{15}\pi$

4.解析：設切點 $(x_1，y_1)\Rightarrow$ 切線為 $y_1y=\dfrac{1}{2}(x+x_1)$ 過 $(-1，0)\Rightarrow 0=\dfrac{1}{2}(-1+x_1)\Rightarrow x_1=1$

$(1，y_1)$ 在 $y^2=x$ 上 $\Rightarrow {y_1}^2=1\Rightarrow y=\pm1$

$\therefore$ 切點為 $(1，1)$ 及 $(1，-1)\Rightarrow$ 切線為 $y=\pm\dfrac{1}{2}(x+1)$



由圖知旋轉體體積

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 dx-\pi\int_0^1 x\,dx=\pi\int_{-1}^{1}\frac{x^2+2x+1}{4}dx-\pi\int_0^1 x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}-\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}+0+2\right)-\pi\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

5.解析：$x^2+(y-2)^2=1\Rightarrow y=2\pm\sqrt{1-x^2}$　上半圓 $y=2+\sqrt{1-x^2}$，下半圓 $y=2-\sqrt{1-x^2}$

所求體積為 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\pi\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx-\int_{-1}^{1}\pi\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx=\int_{-1}^{1}\pi\cdot 8\sqrt{1-x^2}\,dx=8\pi\cdot\frac{1}{2}\pi=4\pi^2$

（其中 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ 為半徑1 之半圓面積）