第 15 次小考

三角函數

20221016&23
高三龍哥數學測
姓名:＿＿＿＿＿

一、 多重選擇題

1. (　　)下列有關 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的性質，何者是正確的？

　(A)圖形對稱於直線 $x=\dfrac{\pi}{6}$

　(B) y 的最大值為 2

　(C) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=-3$ 沒有實數解

　(D) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=-2$ 沒有實數解

　(E)於 $\dfrac{2\pi}{3}<x<\dfrac{7\pi}{6}$ 時，y 呈現遞增

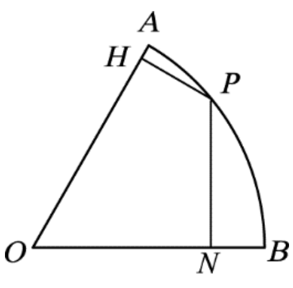
二、 填充題

1. 設 $180^\circ<A<270^\circ$，且 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2\cos 2012^\circ$，若 $A=m^\circ$，則 $m=$【　　　　】

2. 函數 $f(x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x$，且 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，則 $x=a$ 時，$f(x)$ 有最小值 b，試求數對 $(a,b)=$【　　　　】

3. 設 $0\le x\le\pi$，若 $y=\sin 2x-\sin x-\cos x+4$ 之最大值 M，最小值 m，則數對 $(M,m)=$【　　　　】

4. 設扇形 OAB（如圖），半徑 $\overline{OA}=1$，$\angle AOB=60^\circ$，而 P 為 AB 上動點，使得 $\angle OHP=\angle ONP=90^\circ$，則四邊形 $OHPN$ 的周長之最大值為【　　　　】



一、 多重選擇題

1.(A)(B)(C)

二、 填充題

1.242

2.（0，－1）

3. $\left(5, \frac{11}{4}\right)$

4. $\sqrt{3}+1$

- - - - - - - - - - - - << 解析 >> - - - - - - - - - - - -

一、 多重選擇題

1.解析：$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\sin(x+60^\circ)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

(A)○：$x=\frac{\pi}{6}$ 時，$y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}$ 產生最大值∴對稱於 $x=\frac{\pi}{6}$

(B)○：$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$（k 為整數）時，y 有最大值為 2

(C)○：$|y|\le 2$

(D)╳：$\sin x=-\frac{1}{2}$，$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 時，$y=-2$

(E)╳：$x=\frac{2\pi}{3}$ 時，$y=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\pi=0$

$x=\frac{7\pi}{6}$ 時，$y=2\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2$ ∴呈現遞減

故選(A)(B)(C)

二、 填充題

1.解析：$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2\left(\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=2\sin(A+60^\circ)$，其中 $240^\circ<A+60^\circ<330^\circ$

而 $2\cos 2012^\circ=2\cos 212^\circ=-2\cos 32^\circ=-2\sin 58^\circ=2\sin(360^\circ-58^\circ)=2\sin 302^\circ$

因此 $A+60^\circ=302^\circ\Rightarrow A=242^\circ$，即 $m=242$

2.解析：$f(x)=\sin^2x+2\sin x\cos x-\cos^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

又 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{4}\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，

當 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$，即 $x=0$ 時，$f(0)=\sqrt{2}\times\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1$ 為最小值

故數對 $(a, b)=(0, -1)$

3.解析：令 $\sin x+\cos x=t$，則 $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，其中 $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Rightarrow -1\le t\le\sqrt{2}$

又 $t^2=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$

因此 $y=t^2-1-t+4=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

(1)當 $t=\frac{1}{2}$ 時，y 有最小值 $m=\frac{11}{4}$

(2)當 $t=-1$ 時，y 有最大值 $M=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}=5$

故數對 $(M, m)=\left(5, \frac{11}{4}\right)$

4.解析：作輔助線 $\overline{OP}$，設 $\angle AOP=\theta$，$\angle POB=60^\circ-\theta$，$0^\circ\le\theta\le 60^\circ$

則四邊形 $OHPN$ 的周長

$=\cos\theta+\sin\theta+\cos(60^\circ-\theta)+\sin(60^\circ-\theta)$

$=\cos\theta+\sin\theta+\cos60^\circ\cos\theta+\sin60^\circ\sin\theta+\sin60^\circ\cos\theta-\cos60^\circ\sin\theta$

$=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\cos\theta+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\sin\theta=(\sqrt{3}+1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)$

$=(\sqrt{3}+1)\sin(\theta+60^\circ)$

$\Rightarrow$ 當 $\theta=30^\circ$ 時，周長有最大值 $\sqrt{3}+1$