第 16 次小考
指數與對數函數

20221030&1106
高三龍哥數學測
姓名:________

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 40 分

1. (　　)考慮坐標平面上滿足 $4^x=8^y$ 的點 $P(x, y)$，試問下列哪些選項是正確的？
   (A) $(0, 0)$ 是一個可能的 P 點
   (B) $(8, 4)$ 是一個可能的 P 點
   (C) $2x=3y$
   (D)點 P 可能在第二象限
   (E)所有可能的點 $P(x, y)$ 構成的圖形為一直線

2. (　　)已知 $0<a<1$，若方程式 $|\log_a x|-2011=0$ 的最大實根為 x_1，最小實根為 x_2，則下列哪些選項是正確的？
   (A) $y=|\log_a x|$ 的圖形與 $y=2011$ 的圖形共有 2 個交點
   (B)方程式 $|\log_a x|-2011=0$ 恰有 3 個相異實根
   (C) $x_1=a^{2011}$
   (D) $x_1+x_2=2011$
   (E) $x_1 \cdot x_2=1$

二、 填充題：每題 20 分，共 60 分

1. 已知 $y=3^x$ 的圖形中，若 P，Q 分別為直線 $y=4$，$y=12$ 與 $y=3^x$ 的交點，求 $\overline{PQ}$ 的長為【　　　　】

2. 若 $\log_x y=\log_y x$ 且 $x-y=2$，則數對 $(x, y)=$【　　　　】

3. 心理學家常用數學模式 $L(t)=a\cdot(1-10^{-b\cdot t})$ 來描述學生經過 t 星期學習之後所得到的學習量（或成果），這裡的常數 a 與 b 跟學生及學習的科目相關。
   如果大雄一星期可以背熟 80 個單字，兩星期可以背熟 140 個單字，那麼利用這個數學模式，推算大雄三星期可以背熟【　　　　】個單字

第 16 次小考
指數與對數函數

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 40 分

1.(A)(C)(E)

2.(A)(E)

二、 填充題：每題 20 分，共 60 分

1. $\sqrt{65}$

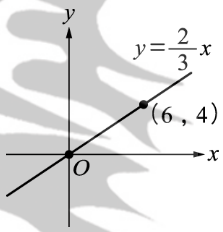
2. ($\sqrt{2}+1$，$\sqrt{2}-1$)

3.185

\- << 解 析 >> -

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 40 分

1.$\boxed{\text{解析}}$：將 $4^x=8^y$ 兩邊以 2 為底取對數得 $\log_2 4^x=\log_2 8^y$

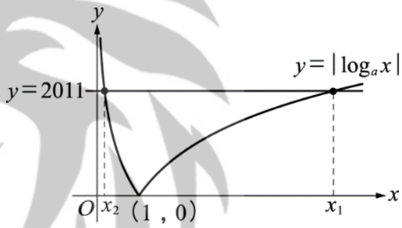


$\Rightarrow x\log_2 4=y\log_2 8\ \Rightarrow 2x=3y\ \Rightarrow y=\frac{2}{3}x$ 圖形為一直線，如圖

此直線過（0，0），不過（8，4），不過第二象限　故選(A)(C)(E)

2.$\boxed{\text{解析}}$：(A) ○：函數 $y=|\log_a x|=\begin{cases}\log_a x，0<x\leqq 1\\ -\log_a x，x>1\end{cases}$

由圖可知，$y=|\log_a x|$ 的圖形與 $y=2011$ 的圖形有 2 個交點



(B) ╳：由(A)，方程式 $|\log_a x|-2011=0$ 恰有 2 個相異實根

(C) ╳：由 $|\log_a x|=2011\Rightarrow \log_a x=\pm 2011\Rightarrow x=a^{2011}$ 或 a^{-2011}

因 $0<a<1$，得 $a^{-2011}>a^{2011}$，故 $x_1=a^{-2011}$，$x_2=a^{2011}$

(D) ╳：$x_1+x_2=a^{-2011}+a^{2011}\neq 1$

(E) ○：$x_1\cdot x_2=a^{-2011}\cdot a^{2011}=a^0=1$

故選(A)(E)

二、 填充題：每題 20 分，共 60 分

1.$\boxed{\text{解析}}$：設 $P(x_1，4)$，$Q(x_2，12)$，則 $3^{x_1}=4$，$3^{x_2}=12\quad\Rightarrow 3^{x_2-x_1}=\frac{12}{4}=3\Rightarrow x_2-x_1=1$

$\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(12-4)^2}=\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{65}$

2.$\boxed{\text{解析}}$：∵底數、真數需大於 0，又 $x-y=2$，故可知 $x>y>0$ 且 $x，y\neq 1$ ($x=2+y>2$)

$\Rightarrow \log_x y=\frac{1}{\log_x y}\quad\Rightarrow(\log_x y)^2=1\Rightarrow(\log_x y)=1$ 或 -1，但 $x>y>0$ 且 $x>2$，

故 $\log_x x>\log_x y\Rightarrow 1>\log_x y$　故 $\log_x y=-1\Rightarrow y=x^{-1}=\frac{1}{x}$　則 $x-y=x-\frac{1}{x}=2\Rightarrow x^2-2x-1=0$

$\Rightarrow x==1\pm\sqrt{2}$ ($1-\sqrt{2}$ 不合)　則 $y=\frac{1}{x}=\sqrt{2}-1$　∴數對 $(x，y)=(\sqrt{2}+1，\sqrt{2}-1)$

3.$\boxed{\text{解析}}$：$\begin{cases}80=L(1)=a(1-10^{-b})\\ 140=L(2)=a(1-10^{-2b})\end{cases}\Rightarrow\frac{80}{140}=\frac{a(1-k)}{a(1-k^2)}$ (令 $10^{-b}=k$) $\Rightarrow\frac{4}{7}=\frac{1}{1+k}$ ($k\neq 1$)

$\Rightarrow 4+4k=7\Rightarrow k=\frac{3}{4}$，代回求 $a\ \Rightarrow a=320$

則所求 $L(3)=a(1-10^{-3b})=320\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]=320\times\left(\frac{37}{64}\right)=185$