第 18 次小考

平面向量

一、 填充題：每題 20 分，共 100 分

1. 設 P 為△ABC 內部的一點，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$，若 $\overleftrightarrow{AP}$ 與 $\overline{BC}$ 交於一點 M，則：

   (1)令 $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，其中 α，β 為實數，則數對（α，β）＝【　　　　】

   (2)△ABP 面積是△ABC 面積的【　　　　】倍

2. △ABC 之三邊長為 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=4$，設點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$
   且 $1\leqq x\leqq 3$，$-1\leqq y\leqq 3$，則所有可能之 P 點所成區域之面積為【　　　　】

3. 過△ABC 的重心 G 的一直線 L 與 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 分別交於 D、E，已知 $\overline{AD}$：$\overline{DB}=4:1$，
   則 $\overline{AE}$：$\overline{EC}$＝【　　　　】

4. 設 $A(a-1，5)$，$B(1，a+2)$，$C(5，3)$，$D(3，4)$，
   $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上之正射影為（4，b），則 $a+b$＝【　　　　】

5. 設 x，y 為實數且 $3x-2y+6=0$，則當 $x=h$，$y=k$ 時，$x^2+y^2-6x-2y+13$ 有最小值 m，
   求序組（h，k，m）＝【　　　　】

第 18 次小考
平面向量

一、 填充題：每題 20 分，共 100 分

1.（1）$\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7}\right)$；（2）$\frac{1}{5}$

2.$60\sqrt{7}$

3.4：3

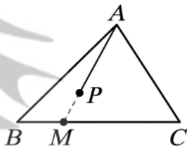
4.－3

5.（0，3，16）

- < < 解 析 > > -

1.解析：（1）令 $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AP}=t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{t}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{5}\overrightarrow{AC}$ ∵$B-M-C$ 共線 ∴$\frac{t}{2}+\frac{t}{5}=1\Rightarrow t=\frac{10}{7}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$ 故數對（α，β）$=\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7}\right)$

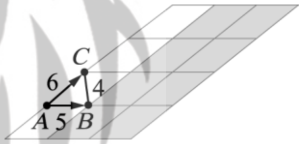


（2）由（1）可知 $\overline{BM}:\overline{CM}=2:5$，$\frac{\triangle ABP}{\triangle ABC}=\frac{\frac{7}{10}\triangle ABM}{\triangle ABC}=\frac{\frac{7}{10}\times\frac{2}{7}\triangle ABC}{\triangle ABC}=\frac{1}{5}$

故$\triangle ABP$ 面積是$\triangle ABC$ 面積的 $\frac{1}{5}$ 倍

2.解析：$\triangle ABC$ 半周長$=\frac{1}{2}$（4＋5＋6）$=\frac{15}{2}$　由海龍公式，$\triangle ABC$ 面積$=\sqrt{\frac{15}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}}=\frac{15}{4}\sqrt{7}$

則所成區域面積$=8\times2\triangle ABC$ 面積$=16\times\frac{15}{4}\sqrt{7}=60\sqrt{7}$

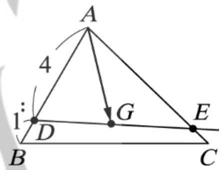


3.解析：∵G 為$\triangle ABC$ 重心

$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}\right)+\frac{1}{3}\left(k\overrightarrow{AE}\right)=\frac{5}{12}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AE}$

又 D，G，E 三點共線　$\therefore \frac{5}{12}+\frac{1}{3}k=1\Rightarrow \frac{1}{3}k=\frac{7}{12}\Rightarrow k=\frac{7}{4}$

故 $\overrightarrow{AC}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AE}$，則 $\overline{AE}:\overline{EC}=4:3$



4.解析：$\overrightarrow{AB}=(2-a,a-3)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,1)$ $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上之正射影為 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|^2}\overrightarrow{CD}$

$=\frac{3a-7}{5}(-2,1)=(4,b)$　因此 $\frac{3a-7}{5}=-2$ 且 $\frac{-2}{4}=\frac{1}{b}\Rightarrow a=-1$ 且 $b=-2$　故 $a+b=-3$

5.解析：x，$y\in R$，$3x-2y=-6$　$x^2+y^2-6x-2y+13=(x-3)^2+(y-1)^2+3$

由柯西不等式知$\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]\left[3^2+(-2)^2\right]\geqq\left[3(x-3)-2(y-1)\right]^2$

$\Rightarrow\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]\times13\geqq(3x-2y-7)^2=(-6-7)^2=13^2$

$\therefore (x-3)^2+(y-1)^2\geqq\frac{13^2}{13}=13$ 當等號成立時，$\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-2}=t$，

令 $x=3t+3$，$y=-2t+1$ 代入 $3x-2y=-6\Rightarrow 13t=-13$，$t=-1$　$\therefore x=0$，$y=3$

此時 $x^2+y^2-6x-2y+13=(x-3)^2+(y-1)^2+3$ 有最小值 $9+4+3=16$

故序組（h，k，m）＝（0，3，16）