第 19 次小考

平面向量、空間向量

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 40 分

1. (　　)在平面上，已知 $\overrightarrow{a}=(23，50)$ 與 $\overrightarrow{b}=(41，89)$ 所張出的平行四邊形面積為 3，試問下列哪些選項是正確的？

　(A) $\overrightarrow{a}$ 和 $5\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為 15

　(B) $\overrightarrow{a}$ 和 $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為 6

　(C) $-3\overrightarrow{a}$ 和 $2\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形為 36

　(D) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為 6

2. (　　)就聯立方程式 $\begin{cases}(k-1)x+(k+1)y=0\\(k+2)x+2k(k+1)y=k-2\end{cases}$ 的解而言，下列何者正確？

　(A) $k=-1$ 時，無解

　(B) $k=-\dfrac{1}{2}$ 時，恰有一解

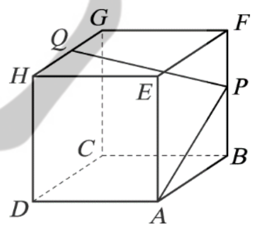
　(C) $k=1$ 時，恰有一解

　(D)此方程組不可能有無限多解

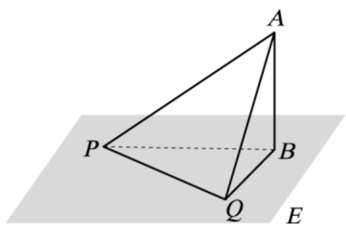
二、 填充題：每題 20 分，共 60 分

1. 設 $x，y，z$ 為實數，若 $2x+2y+z=-8$，
則 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2$ 之最小值為【　　】，此時序組 $(x，y，z)=$【　　】

2. 如圖，$ABCD-EFGH$ 為一正立方體，P、Q 兩點分別為 BF 邊及 GH 邊上的中點，若 $\angle APQ=\theta$，則 $\cos\theta$ 之值為【　　　　】



3. 如圖，$P，Q$ 均在平面 E 上，設空間中一點 A，過 A 作平面 E 的垂線，得垂足為 B，
平面 APQ 與平面 BPQ 所交成的兩面角為 60°，且 $\angle APQ=30^\circ$，$\overline{PA}=12$，
則 $\overline{PA}$ 在平面 E 上之投影長 $\overline{PB}=$【　　　　】



一、 多重選擇題：每題 20 分，共 40 分

1.(A)(C)(D)

2.(A)(C)

二、 填充題：每題 20 分，共 60 分

1.9；$(-1, -4, 2)$

2.$\dfrac{\sqrt{30}}{30}$

3.$3\sqrt{13}$

\- <<　解 析　>> -

一、 多重選擇題：每題 20 分，共 40 分

1.解析：$\overrightarrow{a}=(23, 50)$，$\overrightarrow{b}=(41, 89)$ 所張出的平行四邊形面積$=\left|\begin{vmatrix}23 & 41\\50 & 89\end{vmatrix}\right|=3$

(A)○：$\overrightarrow{a}$ 和 $5\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為 $5\left|\begin{vmatrix}23 & 41\\50 & 89\end{vmatrix}\right|=5\times3=15$

(B)╳：$\overrightarrow{a}$ 和 $(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ 所張出的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}23 & 41\\50 & 89\end{vmatrix}\right|=3$

(C)○：$-3\overrightarrow{a}$ 和 $(2\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b})$ 所張出的平行四邊形面積為 $12\left|\begin{vmatrix}23 & 41\\50 & 89\end{vmatrix}\right|=12\times3=36$

(D)○：$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ 和 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$ 所張出的平行四邊形面積為 $2\left|\begin{vmatrix}23 & 41\\50 & 89\end{vmatrix}\right|=2\times3=6$

故選(A)(C)(D)

2.解析：$\Delta=\begin{vmatrix}k-1 & k+1\\k+2 & 2k(k+1)\end{vmatrix}=2k(k+1)(k-1)-(k+1)(k+2)$

$=(k+1)(2k^2-2k-k-2)=(k+1)(2k+1)(k-2)$

$\Delta_x=\begin{vmatrix}0 & k+1\\k-2 & 2k(k+1)\end{vmatrix}=-(k+1)(k-2)$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}k-1 & 0\\k+2 & k-2\end{vmatrix}=(k-1)(k-2)$

(A)○：$k=-1$ 時，$\Delta=0$，但 $\Delta_y\neq0\Rightarrow$ 方程組無解

(B)╳：$k=-\dfrac{1}{2}$ 時，$\Delta=0$，但 $\Delta_x\neq0\Rightarrow$ 方程組無解

(C)○：$k=1$ 時，$\Delta\neq0\Rightarrow$ 方程組恰有一解

(D)╳：$k=2$ 時，$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0\Rightarrow$ 方程組無限多解

故選(A)(C)

二、 填充題：每題 20 分，共 60 分

1.解析：由柯西不等式知

$[(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2](2^2+2^2+1^2)\geq[2(x-1)+2(y+2)+(z-3)]^2$

$\Rightarrow[(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2]\times9\geq(2x+2y+z-1)^2$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 \geq \dfrac{(-9)^2}{9}=9$

等號在 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}=t$ 時成立

此時 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2$ 之最小值為 9

令 $x=2t+1$，$y=2t-2$，$z=t+3$

代入 $2x+2y+z=-8$

得 $2(2t+1)+2(2t-2)+(t+3)=-8$

$\Rightarrow 9t=-9 \Rightarrow t=-1$

$\therefore x=-1$，$y=-4$，$z=2$

故 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2$ 之最小值為 9

此時序組 $(x,y,z)=(-1,-4,2)$

2.解析：定坐標，設 $C(0,0,0)$，$D(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$A(2,2,0)$，$G(0,0,2)$，$H(2,0,2)$，$F(0,2,2)$，$E(2,2,2)$，$\overline{BF}$ 中點 $P(0,2,1)$，$\overline{GH}$ 中點 $Q(1,0,2)$

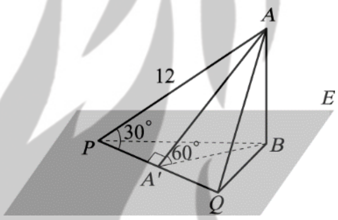
$\Rightarrow \overrightarrow{PA}=(2,0,-1)$，$\overrightarrow{PQ}=(1,-2,1)$

由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PQ}|\cos\theta$

$\Rightarrow 2+0-1=\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\cdot\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{30}}{30}$

3.解析：設 A 在 $\overline{PQ}$ 上投影點為 $A' \Rightarrow \overline{AA'}\perp\overline{PQ}$



$\overline{AA'}=\overline{AP}\ \sin 30^\circ=12\times\dfrac{1}{2}=6$

$\overline{AB}=\overline{AA'}\ \sin 60^\circ=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$\overline{PB}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{12^2-(3\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{144-27}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$

故 $\overline{PA}$ 在平面 E 上之投影長 $\overline{PB}$ 為 $3\sqrt{13}$