

一、多重選擇題：每題 20 分，共 20 分

1. () 以隨機變數 X 表示投擲一顆公正骰子出現的點數，且 $E(X)$ 表示隨機變數 X 的期望值， $\text{Var}(X)$ 表示隨機變數 X 的變異數。若令隨機變數 $Y=6X+20$ ， $Z=6X$ ， $W=X^2$ ，則下列敘述何者正確？
- (A) $3 < E(X) < 4$
 (B) $E(X) < E(W) < E(Y)$
 (C) $E(W) = (E(X))^2$
 (D) $\text{Var}(Y) = \text{Var}(Z)$
 (E) $\text{Var}(X) = \text{Var}(Z)$

二、填充題：每題 20 分，共 80 分

1. 袋中有 4 顆黑球和 2 顆白球，從袋中一次任意抽取兩球，若抽到黑球可得 10 元，抽到白球可得 20 元，則抽球一次所得金額的：
- (1) 期望值為【 】元
 (2) 標準差為【 】元
2. 某遊戲的規則為同時擲兩顆公正骰子一次，若兩顆點數和為 6 或者至少有一顆點數為 6，即可獲得獎金 36 元，否則沒有獎金，則這個遊戲獎金的期望值為【 】元
3. 某隨機變數 X 的機率分布表如表， $a, b > 0$ 。已知期望值 $E(X) = 4$ ，變異數 $\text{Var}(X) = 5$ ，則數對 $(a, b) =$ 【 】
- | | | | |
|--------|---------------|---------------|---------------|
| x | a | b | 5 |
| $p(x)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |
4. 箱子中有 5 個白球，若干個黑球，現從箱子中任取兩球，每個球被取到的機會均等，設隨機變數 X 表示取到的白球個數，若 X 的期望值 $E(X) = \frac{5}{4}$ ，試求 X 的變異數 $\text{Var}(X) =$ 【 】。【臺中女中】

一、多重選擇題：每題 20 分，共 20 分

1.(A)(B)(D)

二、填充題：每題 20 分，共 80 分

1.(1) $\frac{80}{3}$; (2) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$

2.16

3. (1, 7)

4. $\frac{45}{112}$

<< 解析 >>

一、多重選擇題：每題 20 分，共 20 分

1. **解析** : (A)○ : $E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} \Rightarrow 3 < E(X) < 4$

(B)○ : $E(Y) = 6E(X) + 20 = 41$ $E(W) = \frac{91}{6} \Rightarrow E(X) < E(W) < E(Y)$

(C)× : $E(W) = \frac{91}{6} \neq \left(\frac{7}{2}\right)^2$

(D)○ : $\text{Var}(Y) = \text{Var}(6X+20) = 36\text{Var}(X) = \text{Var}(Z)$

(E)× : $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} \Rightarrow \text{Var}(Z) = 36\text{Var}(X) \neq \text{Var}(X)$

故選(A)(B)(D)

二、填充題：每題 20 分，共 80 分

1. **解析** : (1) $E(X) = 40 \times \frac{1}{15} + 30 \times \frac{8}{15} + 20 \times \frac{6}{15} = \frac{80}{3}$ (元)

(2) $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
 $= 1600 \times \frac{1}{15} + 900 \times \frac{8}{15} + 400 \times \frac{6}{15} - \left(\frac{80}{3}\right)^2 = \frac{320}{9} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$ (元)

	2 白球	1 白球 1 黑球	2 黑球
x	40	30	20
$p(x)$	$\frac{C_2^2}{C_2^6} = \frac{1}{15}$	$\frac{C_1^4 C_1^2}{C_2^6} = \frac{8}{15}$	$\frac{C_2^4}{C_2^6} = \frac{6}{15}$

2. **解析** : 所求期望值 = $36 \times \frac{5}{36} + 36 \times \frac{11}{36} + 0 \times \frac{20}{36} = 16$ (元)

3. **解析** : $E(X) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b + \frac{5}{2} = 4 \Rightarrow 2a + b = 9 \dots\dots\dots ①$

$\text{Var}(X) = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{6}b^2 + \frac{25}{2} - 4^2 = 5 \Rightarrow 2a^2 + b^2 = 51 \dots\dots\dots ②$

由①得 $b = 9 - 2a$ 代入②得 $2a^2 + (9 - 2a)^2 = 51 \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow a = 1$ 或 5

\Rightarrow 數對 $(a, b) = (1, 7)$ 或 $(5, -1)$ 又 $a, b > 0$, 因此數對 $(a, b) = (1, 7)$

4. **解析** : 設黑球有 x 個, 則 $E(X) = \frac{C_1^5 C_1^x}{C_2^{5+x}} \times 1 + \frac{C_2^5}{C_2^{5+x}} \times 2 = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow (5x+20) \times \frac{4}{5} = \frac{(5+x)(4+x)}{2} \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3, -4$ (不合)

因此 $E(X^2) = \frac{C_1^5 C_1^3}{C_2^8} \times 1^2 + \frac{C_2^5}{C_2^8} \times 2^2 = \frac{55}{28} \Rightarrow \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{55}{28} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{45}{112}$

情況	點數和 6	至少一顆 6 點	其他
機率	$\frac{5}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{20}{36}$
獎金	36 元	36 元	0 元